ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)
Кафедра высшей математики и математической физики
Направление «Физика»

Алгебра эйконалов на метрическом графе

Бакалаврская работа студента
____________________ **Каплуна Александра Владимировича**
Научный руководитель:
________________________ д. ф.-м. н., проф. **Белишев М.И.**

Санкт-Петербург 2017

Оглавление

1. Введение

Обратные задачи на графе - современный развивающийся раздел математической физики. Важный класс задач относится к определению структуры графа по граничным спектральным и динамическим данным. Алгебра эйконалов (АЭ) на метрическом графе введена в статье [1] в качестве перспективного средства для решения этого класса задач. В ней установлено, что АЭ имеет блочную структуру, характер которой связан с геометрией графа. Эта связь, однако, имеет весьма сложный и неявный характер и извлечение информации о геометрии графа из АЭ остается главной проблемой.

Цель данной работы состоит в исследовании АЭ для графа простой структуры: трехлучевой звезды с ребрами разной длины. Мы показываем, что что сами блоки, составляющие АЭ, имеют "тонкую структуру" и содержат стандартные алгебры вида $C([a,b],\mathbb{M}^n)$. Описывается эволюция структуры АЭ в зависимости от времени наблюдения. Отмечен интересный эффект - появление кластера в спектре АЭ, отвечающего наложению волн от разных граничных вершин во внутренней вершине графа.

Автор приносит благодарность своему научному руководителю М.И.Белишеву за постановку задачи и помощь в работе.

2. Теоретическое описание

2.1. Обозначения

Все пространства и алгебры в работе считаются вещественными.

При рассмотрении пространств $L_2([0,\delta],\mathbb{R}^n)$ элементы этого пространства понимаются следующим образом:

$$f \in L_2([0,\delta],\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ \vdots \\ f_n(r) \end{pmatrix}, f_i \in L_2([0,\delta]).$$

Далее обозначения f_i для компонент вектор-функции f используются без дополнительных оговорок.

Под стандартными базисными матрицами в $\mathbb{M}^n$ понимаются следующие матрицы:

$$(E_{i,j})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \text{ где } \delta_{ik} \text{ - дельта Кронекера.}$$

Для любой матрицы $A \in \mathbb{M}^n : (A)_{ij} = a_{ij}$ выполнено очевидное соотношение:

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{i,j}.$$

Символ $"\cong"$ означает изометрический изоморфизм соответствующих пространств или алгебр.

Под функцией $\delta_\gamma(\gamma')$ понимается следующий объект

$$\delta_\gamma(\gamma') = \begin{cases} 1, & \gamma' = \gamma \\ 0, & \gamma' \neq \gamma. \end{cases}$$

Через $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ обозначаем алгебру линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

2.2. Сведения из теории C^*-алгебр

Приведем оперделения из теории C^*-алгебр.

Def 1 [3, с. 51-53]: $\mathfrak{A}$ - C^*-алгебра, если $\mathfrak{A}$ - банахова алгебра, причем существует отображение $x \to x^*$ $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, являющееся инволюцией, т.е. для которого выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned}
&(x^*)^* = x \\
&(x+y)^* = x^* + y^* \\
&(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \\
&(xy)^* = y^* x^*
\end{aligned}$$

при этом выполняются соотношения:

$$||x^*|| = ||x||, \; ||xx^*|| = ||x||^2.$$

Все алгебры в этой работе являются C^*-алгебрами.

Def 2 [2, с. 97, 4.1.1]: C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ - элементарная, если существует такое гильбертово пространство H, что $\mathfrak{A} \cong \mathrm{S}_\infty(H)$.

Def 3 [2, с. 97, 4.1.1]: C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ называется $CCR - C^*$-алгеброй, если для всякого неприводимого представления π и всякого $x \in \mathfrak{A}$ оператор $\pi(x)$ - компактный.

Def 4 [2, с. 211, 10.2.1]: Пусть $\mathscr{T}$ - топологическое пространство, $(\mathfrak{A}(t))_{t\in\mathscr{T}}$ - семейство C^*-алгебр. Элементы $x \in \prod\limits_{t\in\mathscr{T}} \mathfrak{A}(t)$, т.е. функции на $\mathscr{T}$ такие, что $x(t) \in \mathfrak{A}(t)$, называются векторными полями.

Def 5 [2, с. 211, 10.2.2],[2, с. 213-214, 10.3.1]: Пусть $\mathscr{T}$ - топологическое пространство. Непрерывным полем C^*-алгебр называется семейство C^*-алгебр $(\mathfrak{A}(t))_{t\in\mathscr{T}}$, снабженное таким множеством векторных полей $\Theta \subset \prod\limits_{t\in\mathscr{T}} \mathfrak{A}(t)$, что

- Θ есть векторное подпространство в $\prod\limits_{t\in\mathscr{T}} \mathfrak{A}(t)$
- при $t \in \mathscr{T}$ множество $\{x(t)\}_{x\in\Theta}$ плотно в $\mathfrak{A}(t)$
- при $x \in \Theta$ функция $t \to ||x(t)||$ - непрерывна в $\mathscr{T}$
- Пусть $x \in \prod\limits_{t\in\mathscr{T}} \mathfrak{A}(t)$.Тогда, если $\forall t \in \mathscr{T}, \varepsilon > 0 \ \exists x' \in \Theta : ||x(t) - x'(t)|| \leq \varepsilon$, то $x \in \Theta$.

Следующая теорема играет в дальнейшем ключевую роль.

Теорема 1 [2, с. 219, 10.5.3]: Пусть $\mathscr{T}$ - локально компактное пространство, $(\mathfrak{A}(t), \Theta)$ - непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на $\mathscr{T}$, $\mathfrak{A}$ - алгебра, определенная этим полем. Пусть $\mathfrak{A}'$ - такая C^*-подалгебра $\mathfrak{A}$, что для любых $t_1, t_2 \in \mathscr{T}$ и произвольных $\xi_1 \in \mathfrak{A}(t_1)$ и $\xi_2 \in \mathfrak{A}(t_2)$ найдется такой элемент $f \in \mathfrak{A}'$, что выполнено $f(t_1) = \xi_1$ и $f(t_2) = \xi_2$. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$.

Отметим, что подразумевается, что $\mathfrak{A}'$ - замкнутая.

2.3. Спектр алгебр

Определим спектр алгебры и связанные с ним понятия.

Def 5 [3, с. 194]: Пусть L - модулярный максимальный левый идеал алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда множество

$$I = \{a \in \mathfrak{A} | \ a\mathfrak{A} \subseteq \ L\} \subset L,$$

и является двусторонним идеалом в $\mathfrak{A}$. Идеал I называется примитивным идеалом, отвечающим L.

Множество всех примитивных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим $\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$. На нем вводится топология Джекобсона [2, с. 74, 3.1.1]. Она определяется через операцию замыкания, которая вводится следующим образом:

Def 6: Пусть S - множество элементов $\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$. Определим $I(S) = \bigcap\limits_{B\in S} B$. Тогда назовем замыканием S множество $\overline{S} = \{B \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{A}) | \ I(S) \subset B\}$.

Множество $\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$, снабженное топологией Джекобсона далее будем называть спектром алгебры $\mathfrak{A}$.

Стандартными мы называем алгебры следующего вида:

- алгебра $C([0,\delta])$ с sup-нормой,
- алгебра $C([0,\delta],\mathbb{M}^n)$ с нормой $||f||_{C([0,\delta],\mathbb{M}^n)} = \sup\limits_{0\le t\le\delta} ||f(t)||$, где $||f(t)||$ -норма матрицы $f(t)$ как оператора в $\mathbb{R}^n$,
- алгебра $C_0([0,\delta]) = \{f \in C([0,\delta]) \mid f(0) = 0\}$,
- алгебра $\dot{C}([0,\delta]) = \left\{ f \in C([0,\delta],\mathbb{M}^3) \,\middle|\, f(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$.

Со стандартными алгебрами связаны операторные алгебры $C^{\mathrm{op}}([0,\delta])$, $C^{\mathrm{op}}([0,\delta],\mathbb{M}^n)$, $C_0^{\mathrm{op}}([0,\delta])$, $\dot{C}^{\mathrm{op}}([0,\delta])$, элементы которых суть операторы, действующие в пространствах $L_2([0,\delta],\mathbb{R}^n)$; их действие состоит в умножении элементов пространства на матрицы-функции из соответствующей функциональной алгебры. Как известно, каждая из стандартных (функциональных) алгебр изометрически изоморфна соответствующей операторной алгебре.

Предложение 1 [4, с. 592]: Любой максимальный идеал алгебры $C([0,\delta])$ есть совокупность элементов алгебры, обращающихся в ноль в какой-либо фиксированной точке $r_0 \in [0,\delta]$.

Предложение 2: Любой максимальный двусторонний идеал алгебры $C([0,\delta],\mathbb{M}^n)$ есть совокупность элементов алгебры, обращающихся в ноль в какой-либо фиксированной точке $r_0 \in [0,\delta]$.

► Пусть J есть двусторонний нетривиальный идеал в алгебре $C([0,\delta],\mathbb{M}^n)$. Докажем, что

$$\exists \tau \in [0,\delta]\ \forall x(t) \in \mathrm{J}\ \ x(\tau) = 0.$$

Доказательство проведем от противного. Предположим следующее:

$$\forall \tau \in [0,\delta]\ \exists x(t) \in \mathrm{J}\ \ x(\tau) \neq 0.$$

Введем функции $C([0,\delta],\mathbb{M}^n) \ni \mathscr{E}_{i,j}(t) = E_{ij}$. Для функций $\mathscr{E}_{i,j}(t)$ и для матриц $E_{i,j}$ выполняются следующие соотношения:

$$\mathscr{E}_{i,j}(t)\mathscr{E}_{k,l}(t) = \delta_{jk}\mathscr{E}_{i,l}(t),\ E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{jk}E_{i,l}.$$

Теперь рассмотрим произвольное $\tau \in [0,\delta]$ и $x_\tau(t) \in \mathrm{J}\ \ x_\tau(\tau) \neq 0$. Раз $x_\tau(\tau) \neq 0$, то рассмотрим его разложение по базису $E_{i,j}$.

$$x_\tau(\tau) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{i,j}.$$

Выберем элемент $a_{pq} \neq 0$. Тогда верно следующее:

$$E_{i,p} x_\tau(\tau) E_{q,j} = a_{pq} E_{i,j}.$$

Пусть $\phi(t) = (x_\tau)_{pq}(t) \in C([0,\delta])$. Тогда рассмотрим следующий элемент, лежащий в идеале J:

$$y_\tau(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_{i,p}(t) x_\tau(t) \mathscr{E}_{q,i}(t) = \phi(t) \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_{i,i} = \phi(t)\mathrm{I}(t),$$

где $\mathrm{I}(t)$ - единица в $C([0,\delta],\mathbb{M}^n)$.

Приведенные выше рассуждения справедливы для произвольного $\tau \in [0,\delta]$. Таким образом исходное предположение эквивалентно следующему:

$$\forall \tau \in [0,\delta] \ \exists x_\tau(t) \in \mathrm{J} \ \ x_\tau(\tau) = \phi_\tau(\tau)\mathrm{I}(t), \ \ \phi_\tau \in C([0,\delta]), \phi_\tau(\tau) \neq 0.$$

В связи с тем, что любая функция ϕ_τ непрерывна, то для каждой из этих функций существует окрестность U_τ, в которой $\phi_\tau(t) \neq 0$. По построению выполняется следующее свойство: $[0,\delta] = \bigcup\limits_{\tau \in T} U_\tau$ - покрытие $[0,\delta]$, но $[0,\delta]$- компактно, а значит выберем конечное подпокрытие: $[0,\delta] = \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i$. Рассмотрим следующую функцию:

$$\mathscr{X}(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\overline{x_i(t)} = \sum_{i=1}^{N} |\phi_i(t)|^2 \mathrm{I}(t) = \Psi(t)\mathrm{I}(t),$$

где про функцию $\Psi(t)$ известно следующее:

$$\forall t \in T \ \ \Psi(t) > 0, \ \ \Psi(t) \in C([0,\delta]) \Rightarrow \exists (\Psi(t))^{-1} \in C([0,\delta]).$$

Тогда можно утверждать следующее:

$$\exists (\mathscr{X}(t))^{-1} \in \mathfrak{A}, (\mathscr{X}(t))^{-1} = (\Psi(t))^{-1}\mathrm{I}(t).$$

В таком случае, согласно определению идеала, будет выполнено следующее:

$$(\mathscr{X}(t))^{-1}\mathscr{X}(t) = (\Psi(t))^{-1}\Psi(t)\mathrm{I}(t) = \mathrm{I}(t) \in \mathrm{J} \Rightarrow \mathrm{J} = C([0,\delta],\mathbb{M}^n).$$

Получили, что любой для любого произвольного двустороннего идеала $\mathrm{J} \subset C([0,\delta],\mathbb{M}^n)$ существует хотя бы одна точка, в которой все его элементы обращаются в ноль. Из этого, а также из частичной упорядоченности идеалов по вложению следует, что в каждом максимальном двустороннем идеале существует ровно одна точка, в которой обращаются в ноль все его элементы.◀

Это утверждение остается справедливым для любого произвольного компактного топологического пространства $\mathscr{T}$, а не только для интервала $[0,\delta]$.

Приведем утверждения, которые связывают понятия максимального и примитивного идеалов.

Предложение 3 [2, с. 101, 4.2.3]: Пусть $\mathfrak{A}$ - CCR-алгебра. Тогда каждый примитивный идеал $\mathfrak{A}$ - максимальный двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$ и любой максимальный двусторонний идеал является примитивным.

Предложение 4: Каждая алгебра $C([0,\delta],\mathbb{M}^n), n \geq 1$ является CCR-алгеброй.

Этот факт связан с тем, что все представления этих алгебр конечномерны, а значит, компактны.

Отсюда получаем, используя Предложения 1,2,3,4, структуру спектра для этих алгебр:

$$\forall n \geq 1 \ \mathrm{Prim}(C([0,\delta],\mathbb{M}^n)) = \{S_{r_0} \subset C([0,\delta],\mathbb{M}^n),\ r_0 \in [0,\delta]|\ \forall x \in S_{r_0}\ x(r_0) = 0\}.$$

Рассмотрим алгебру $C_0([0,\delta])$. Видно, что сужение этой алгебры на каждый замкнутый интервал $[\varepsilon,\delta],\ \varepsilon > 0$ изометрически изоморфно $C([\varepsilon,\delta])$. ε произвольное, а значит, спектр состоит из стандартных элементов S_{r_0} - множеств функций, обнуляющихся в r_0, причем $r_0 \in (0,\delta]$. Точке $r_0 = 0$ не соответствует максимальный двусторонний идеал в связи с тем, что стандартный идеал $S_0 = C_0([0,\delta])$.

Осталось описать последнюю из стандартных алгебр - алгебру $\dot{C}([0,\delta])$. Видно, что она отличается от $C([0,\delta],\mathbb{M}^3)$ только условием на конце. Тогда каждой точке $r_0 \neq 0$ отвечает ровно один максимальный двусторонний идеал стандартного вида. Точке $r = 0$ отвечают два максимальных идеала:

- $S_0^1 = \{x \in C([0,\delta],\mathbb{M}^3)|\ x_{11}(0) = 0\}$
- $S_0^2 = \{x \in C([0,\delta],\mathbb{M}^3)|\ x_{ij}(0) = 0,\ i,j = 2,3\}$

Далее рассмотрим, в каком смысле понимается спектр для прямой суммы алгебр. Пусть дана алгебра $\mathfrak{A}$, про которую известно следующее:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_n.$$

Тогда спектр алгебры $\mathfrak{A}$ выглядит так:

$$\mathrm{Prim}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i=1}^{N} \{\mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_{i-1} \oplus S \oplus \mathfrak{A}_{i+1} \oplus \ldots \mathfrak{A}_N|\ S \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{A}_i)\}.$$

На этом пространстве опять вводится топология Джекобсона.

2.4. Вспомогательные утверждения

Для множества $A \subset \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ - алгебра, через $\bigvee A$ обозначим минимальную замкнутую подалгебру в $\mathfrak{A}$, содержащую A.

Приведем некоторые нужные для дальнейшего результаты:

Лемма 1: Любая матрица $A \in \mathbb{M}^2$ может быть разложена по базису, состоящему из матриц: a, b, ab, ba, где:

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

► Для доказательства достаточно показать, что каждая из стандартных базисных матриц в $\mathbb{M}^2$ может быть выражена через новый базис. Опишем матрицу перехода от стандартного базиса к новому. Для этого воспользуемся следующими соотношениями:

$$\begin{array}{ll} a=\frac{1}{2}(E_{1,1}+E_{1,2}+E_{2,1}+E_{2,2}) & b=E_{1,1} \\ ab=\frac{1}{2}(E_{1,1}+E_{2,1}) & ba=\frac{1}{2}(E_{1,1}+E_{1,2}). \end{array}$$

и запишем их в виде:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ ab \\ ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица перехода является невырожденной, а значит, указанные матрицы действительно образуют базис в $\mathbb{M}^2$. ◄

Следующие утверждения являются следствиями Леммы 1:

Следствие 1.1: Матрицы a и b из Леммы 1 являются образующими для алгебры $\mathbb{M}^2$.

Следствие 1.2: Матрицы f и g следующего вида

$$a=\frac{1}{2}(E_{i,i}+E_{i,i+1}+E_{i+1,i}+E_{i+1,i+1}),\ b=E_{i,i},\ f,g\in\mathbb{M}^n$$

для каждого фиксированного $i=1\dots n-1$ являются образующими для подалгебры:

$$\bigvee\{a,b\}=\left\{a\in\mathbb{M}^n \,\middle|\, a=\sum_{k,l=0}^{1} a_{kl}E_{i+k,i+l},\ a_{kl}\in\mathbb{R}\right\}.$$

Лемма 2: Рассмотрим матрицы a и b следующего вида:

$$a=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_2}{2} \\ 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_2}{2} \end{pmatrix},\ a_i\neq 0,\ a_1\neq a_2;\ b=\begin{pmatrix} \frac{b_1}{2} & 0 & \frac{b_1}{2} \\ 0 & b_2 & 0 \\ \frac{b_1}{2} & 0 & \frac{b_1}{2} \end{pmatrix},\ b_i\neq 0,\ b_1\neq b_2.$$

Эти матрицы являются образующими для алгебры $\mathbb{M}^3$.

► Доказательство проводится аналогично доказательству Леммы 1. Рассмотрим следующий набор матриц $F=\{a,b,a^2,ab,ba,b^2,a^2b,ba^2,ab^2\}$ и покажем, что они являются базисом в $\mathbb{M}^3$. Справедливо представление:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a^2 \\ ab \\ ba \\ b^2 \\ a^2b \\ ba^2 \\ ab^2 \end{pmatrix} = \mathfrak{Y} \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{1,3} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \\ E_{2,3} \\ E_{3,1} \\ E_{3,2} \\ E_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$
\mathfrak{Y} = \begin{pmatrix}
a_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_2}{2} & 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_2}{2} \\
\frac{b_1}{2} & 0 & \frac{b_1}{2} & 0 & b_2 & 0 & \frac{b_1}{2} & 0 & \frac{b_1}{2} \\
a_1^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2^2}{2} & \frac{a_2^2}{2} & 0 & \frac{a_2^2}{2} & \frac{a_2^2}{2} \\
\frac{a_1b_1}{2} & 0 & \frac{a_1b_1}{2} & \frac{a_2b_1}{4} & \frac{a_2b_2}{2} & \frac{a_2b_1}{4} & \frac{a_2b_1}{4} & \frac{a_2b_2}{2} & \frac{a_2b_1}{4} \\
\frac{a_1b_1}{2} & \frac{a_2b_1}{4} & \frac{a_2b_1}{4} & 0 & \frac{a_2b_2}{2} & \frac{a_2b_2}{2} & \frac{a_1b_1}{2} & \frac{a_2b_1}{4} & \frac{a_2b_1}{4} \\
\frac{b_1^2}{2} & 0 & \frac{b_1^2}{2} & 0 & b_2^2 & 0 & \frac{b_1^2}{2} & 0 & \frac{b_1^2}{2} \\
\frac{a_1^2b_1}{2} & 0 & \frac{a_1^2b_1}{2} & \frac{a_2^2b_1}{4} & \frac{a_2^2b_2}{2} & \frac{a_2^2b_1}{4} & \frac{a_2^2b_1}{4} & \frac{a_2^2b_2}{2} & \frac{a_2^2b_1}{4} \\
\frac{a_1^2b_1}{2} & \frac{a_2^2b_1}{4} & \frac{a_2^2b_1}{4} & 0 & \frac{a_2^2b_2}{2} & \frac{a_2^2b_2}{2} & \frac{a_1^2b_1}{2} & \frac{a_2^2b_1}{4} & \frac{a_2^2b_1}{4} \\
\frac{a_1b_1^2}{2} & 0 & \frac{a_1b_1^2}{2} & \frac{a_2b_1^2}{4} & \frac{a_2b_2^2}{2} & \frac{a_2b_1^2}{4} & \frac{a_2b_1^2}{4} & \frac{a_2b_2^2}{2} & \frac{a_2b_1^2}{4}
\end{pmatrix}.
$$

Остается увидеть, что $\mathfrak{Y}$ при фиксированных выше условиях на a_i, b_i является невырожденной. Для этого рассмотрим ее определитель:

$$
\det(\mathfrak{Y}) = -\frac{1}{512} a_1^3 a_2^4 b_1^5 b_2^2 (a_1 - a_2)^3 (b_1 - b_2)^2.
$$

Видно, что в условиях леммы определитель отличен от 0, а значит, лемма доказана.◀

Лемма 3: Матрицы

$$
a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

являются образующими для алгебры, изометрически изоморфной следующей алгебре:

$$
\left\{ f \in \mathbb{M}^3 \;\middle|\; f = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}, f_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{M} \oplus \mathbb{M}^2 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{M}^2.
$$

► У данных матриц есть один общий собственный вектор:

$$
e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Перейдем к базису, в котором он будет одним из базисных. Это можно сделать, например, при помощи матрицы

$$
X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.
$$

После перехода к новому базису матрицы a и b выглядят следующим образом:

$$
\tilde{a} = X^{-1} a X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$\tilde{b} = X^{-1}aX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Опишем матрицу перехода от базиса $\{E_{1,1}, E_{2+k,2+l} | k,l \in \{0,1\}\}$ к новому базису $F = \{\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}\tilde{a}, \tilde{a}\tilde{b}, \tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}\}$. Тогда можно выписать следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{b}\tilde{a} \\ \tilde{a}\tilde{b} \\ \tilde{b}\tilde{a}\tilde{b} \end{pmatrix} = \mathfrak{W} \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,2} \\ E_{2,3} \\ E_{3,2} \\ E_{3,3} \end{pmatrix}, \ \mathfrak{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}.$$

Выполнено соотношение $\det(\mathfrak{W}) = -\frac{27}{256} \neq 0$, а значит $\mathfrak{W}$ - невырожденная, что и доказывает утверждение. ◀

Следующие утверждения являются следствиями Лемм 2 и 3:

Следствие 2.1: Пусть

$$\begin{aligned} a^{(i)} &= a_1 E_{i,i} + \tfrac{a_2}{2}(E_{i+1,i+1} + E_{i+1,i+2} + E_{i+2,i+1} + E_{i+2,i+2}),\ a_i \neq 0,\ a_1 \neq a_2,\ a \in \mathbb{M}^n, \\ b^{(i)} &= b_2 E_{i+1,i+1} + \tfrac{b_1}{2}(E_{i,i} + E_{i,i+2} + E_{i+2,i} + E_{i+2,i+2}),\ b_i \neq 0,\ b_1 \neq b_2,\ b \in \mathbb{M}^n \end{aligned}.$$

Тогда для каждого фиксированного $i = 1 \ldots n-2$ являются образующими для подалгебры

$$\bigvee\{a^{(i)}, b^{(i)}\} = \left\{ f \in \mathbb{M}^n \,\middle|\, f = \sum_{k,l=0}^{2} f_{k,l} E_{i+k,i+l},\ f_{k,l} \in \mathbb{R} \right\}$$

Следствие 3.1: Пусть

$$\begin{aligned} a^{(i)} &= E_{i,i} + \tfrac{1}{2}(E_{i+1,i+1} + E_{i+1,i+2} + E_{i+2,i+1} + E_{i+2,i+2}),\ a \in \mathbb{M}^n, \\ b^{(i)} &= E_{i+1,i+1} + \tfrac{1}{2}(E_{i,i} + E_{i,i+2} + E_{i+2,i} + E_{i+2,i+2}),\ b \in \mathbb{M}^n. \end{aligned}$$

Тогда для каждого фиксированного $i = 1 \ldots n-2$ a и b являются образующими подалгебры:

$$\bigvee\{a^{(i)}, b^{(i)}\} = \left\{ f \in \mathbb{M}^n \,\middle|\, f = \sum_{k,l=0}^{2} f_{kl} E_{i+k,i+l},\ f_{k,l} \in \mathbb{R} \right\},$$

При этом в $\mathbb{R}^n$ существует ортонормированный базис, в котором

$$U^* \bigvee\{a^{(i)}, b^{(i)}\} U = \left\{ f \in \mathbb{M}^n \,\middle|\, f = f_{00} E_{i,i} + \sum_{k,l=1}^{2} f_{kl} E_{i+k,i+l},\ f_{k,l} \in \mathbb{R} \right\},$$

где U - матрица перехода к этому базису.

3. Волны на графе

3.1. Граф.

Рассмотрим компактный связный граф Ω, вложенный в $\mathbb{R}^3$. Граф состоит из ребер e_i - открытых интервалов прямых - и вершин. Для вершин введем понятие валентности следующим образом:

$$m(v) = \#\{e_i|\ v \in \overline{e_i}\},\ \text{где } v \text{ - вершина, а } e_i \text{ - ребра.}$$

Будем считать, что все вершины графа имеют валентность одного из двух видов:

- $m(v) = 1$, тогда назовем такую вершину граничной и будем писать $v \in \Gamma$,
- $m(v) \geq 3$, тогда назовем такую вершину внутренней и будем писать $v \in V$.

Таким образом, граф можно представить в следующем виде:

$$\Omega = \Gamma \bigcup V \bigcup E,$$

где

$$\begin{aligned}
&V = \{v_i\},\ \#V < \infty \text{ - множество внутренних вершин,}\\
&\Gamma = \{\gamma_i\},\ \#\Gamma < \infty \text{ - множество граничных вершин,}\\
&E = \bigcup_i e_i \text{ - множество ребер графа.}
\end{aligned}$$

Поскольку граф Ω вложен в $\mathbb{R}^3$, на нем имеется индуцированная внутренняя метрика τ. Для подмножества $A \subset \Omega$ определим его метрическую окрестность

$$\Omega^s[A] = \{x \in \Omega \,|\, \tau(x, A) < s\}\ (s > 0).$$

3.2. Распространение волн. Гидра. Форма волны.

Постановка задачи

Пусть x - точка ребра $e \subset E$. Будем считать, что e ориентировано каким-то из двух возможных способов и определим производную вдоль e:

$$\frac{dy}{de}(x) = \lim_{x' \to x,\ x < x'} \frac{y(x') - y(x)}{\tau(x', x)}.$$

Отметим, что при таком определении $\frac{d^2y}{de^2}$ от ориентации не зависит.
Для вершины $v \in V \cup \Gamma$, $v \in \overline{e}$ определим производную вдоль e по исходящему из v направлению:

$$\frac{dy}{de_+}(v) = \lim_{e_i \ni x \to v} \frac{y(x) - y(v)}{\tau(x, v)}.$$

Для каждой внутренней вершины $v \in V$ определим исходящий поток:

$$\Pi_v[y] = \sum_{\overline{e} \ni v} \frac{dy}{de_+}(v).$$

Далее рассмотрим пространства, которые будут использоваться при постановке начально-краевой задачи на графе:

$$\mathscr{H} = L_2(\Omega)(\text{с мерой, отвечающей метрике } \tau)$$
$$\mathscr{H}^2 = \left\{ y \in C(\Omega),\ \forall i\ y \in \mathscr{H}^2(e_i) \right\},\ \mathscr{H}^2 \text{ - пространство Соболева}$$
$$\mathscr{K} = \left\{ y \in \mathscr{H}^2 \middle| \Pi_v[y] = 0 \right\} - \text{ класс Кирхгофа}$$

Далее рассматриваем начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{d^2y}{de^2} = 0 & \text{в } \mathscr{H}, 0 \le t \le T \\ u(\cdot,t) \in \mathscr{K} & 0 < t < T \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega \\ u = f & \text{на } \Gamma \times [0,T]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $T < \infty$, $f = f(\gamma,t)$ - граничное управление, $u = u^f(x,t)$ - решение.
Определим пространство управлений $\mathscr{F}^T = L_2(\Gamma \times [0,T])$ со скалярным произведением:

$$(f,g)_{\mathscr{F}^T} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_0^T f(\gamma,t) g(\gamma,t) dt.$$

Его можно представить в виде прямой суммы пространств управлений, связанных с отдельными вершинами:

$$\mathscr{F}^T = \bigoplus \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{F}_\gamma^T \ ,$$

где

$$\mathscr{F}_\gamma^T = \{ f \in \mathscr{F}^T \mid \operatorname{supp} f \subset \{\gamma\} \times [0,T] \} = \{ \delta_\gamma(\gamma') \varphi_\gamma(t) \mid \varphi_\gamma \in L_2(0,T) \}.$$

Можно показать, что для управлений f с $\varphi_\gamma \in C^2[0,T] : \varphi_\gamma(0) = \varphi_\gamma'(0) = \varphi_\gamma''(0) = 0$ задача (1) имеет единственное классическое решение.

Фундаментальное решение. Гидра.

Фундаментальным решением задачи [1], отвечающим вершине $\gamma \in \Gamma$ мы называем решение u^f с управлением $f(\gamma',t) = \delta_\gamma(\gamma')\delta(t)$, где $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака. Подробное описание решения $u^{\delta_\gamma \delta}$ приведено в [1]. Здесь мы приведем его в виде формального "правила", которое вполне определяет $u^{\delta_\gamma \delta}$ всюду в Ω при всех временах.

1. Частицей мы назовем распределение в $\Omega \backslash \Gamma$ (функционал над $C_0^\infty(\Omega)$) вида $a\delta_x$, где δ_x - мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in \Omega \backslash \Gamma$, $a \in \mathbb{R}$ - отличное от 0 число, называемое амплитудой.

2. Частица $a\delta_x$ движется по ребру со скоростью 1 (т.е. $|\dot{x}(t)| = 1$) в одном из двух возможных направлений.

3. При достижении граничной вершины, частица мгновенно меняет направление движения на противоположное (отражается) и меняет амплитуду с a на $-a$.

4. Пусть частица $a\delta_x$ движется вдоль ребра e к внутренней вершине v и достигает ее в момент $t = t_0$. При прохождении через v частица расщепляется на $m(v)$ частиц. Одна из них (отраженная) движется вдоль e в направлении, противоположном исходному и имеет амплитуду $\frac{m(v)-2}{m(v)}a$. Остальные (прошедшие) $m(v)-1$ частиц движутся вдоль других ребер (по одной в каждом ребре), примыкающих к v. Каждая из прошедших частиц имеет амплитуду $\frac{2}{m(v)}a$.

5. Частицы движутся по графу независимо друг от друга.

Приняв соглашения 1.-5., мы можем описать решение $u^{\delta_\gamma \delta}$ следующим образом.

- При $t < \tau(\gamma, V)$ выполнено $u^{\delta_\gamma \delta} = \delta_{x(t)}$, где $x(t)$ есть точка ребра e, исходящего из γ, определяемая условием $\tau(\gamma, x(t)) = t$. Таким образом, при этих временах $u^{\delta_\gamma \delta}$ есть частица амплитуды 1, движущаяся от γ к ближайшей внутренней вершине.

- Дальнейшая эволюция фундаментального решения однозначно определяется правилами 1.-5.

В результате, в каждый момент $t > 0$ фундаментальное решение есть конечная сумма частица, т.е. распределение $u^{\delta_\gamma \delta} = \sum\limits_i a_i \delta_{x_i(t)}$. Можно показать, что оно является решением волнового уравнения [1] в адекватном обобщенном смысле. В силу этого, $u^{\delta_\gamma \delta}$ можно понимать и как пространственно-временное распределение в $\Omega \times \{t > 0\}$. Его носитель $H_\gamma = \operatorname{supp}\, u^{\delta_\gamma \delta} \subset (\Omega \backslash \Gamma) \times \mathbb{R}_+$ мы называем гидрой. В других терминах гидра это объединение траекторий всех частиц составляющих фундаментальное решение. Это объединение есть пространственно-временной граф. Присоединим к нему точки $(\gamma, t), \gamma \in \Gamma$, являющиеся концами ребер H_γ.

На гидре определим функцию (амплитуду) $a(x,t)$ по правилу: для $(x,t) \in H_\gamma$ значение $a(x,t)$ есть сумма амплитуд частиц, находящихся в точке $x \in \Omega \backslash \Gamma$ в момент времени t. В точках $(\gamma', t) \in H_\gamma, t > 0$ положим $a(\gamma', t) = 0$, что естественно с точки зрения правила отражения 3., и примем $a(\gamma, 0) = 1$. Точка $(\gamma, 0) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$ называется корнем гидры. На гидре определены операции пространственного и временного проектирования (и обратные к ним):

$$\pi : H_\gamma \to \Omega, \;\; \pi((x,t)) = x, \;\; \pi^{-1} : \Omega \to H_\gamma, \;\; \pi^{-1}(x') = \{(x', t) \in H_\gamma\},$$

$$\rho : H_\gamma \to \overline{\mathbb{R}}_+, \;\; \rho((x,t)) = t, \;\; \rho^{-1} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to H_\gamma, \;\; \rho(t') = \{(x, t') \in H_\gamma\}.$$

Для описания волны на графе в случае произвольной функции $f(\gamma, t)$ вводятся понятие усеченной гидры:

$$H_\gamma^T = \{(x,t) \in H_\gamma | t \in [0, T]\}.$$

На гидре вводится метрика μ, связанная с метрикой τ на Ω, она же внутренняя метрика, индуцированная вложением в $\mathbb{R}^4$:

$$\mu((x,t),(x',t')) = (\tau(x,x')^2 + (t-t')^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Форма решения

Используя введенные выше обозначения, можно показать, что для управления

$$f(\cdot,t) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma(\cdot)\varphi_\gamma(t)$$

волна в финальный момент времени T имеет вид:

$$u^f(x,T) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{t\in\rho(\pi^{-1}(x))} a(x,t)\varphi_\gamma(T-t). \tag{2}$$

Для негладких управлений $f \in \mathscr{F}^T$ (обобщенным) решением задачи (1) мы по определению считаем правую часть представления (2).

3.3. Разбиение гидры

Введем понятие соседних точек на гидре H_γ^T. Точки $l = (x,t)$ и $l' = (x',t')$ называются соседними, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

- $\pi(l) = \pi(l')$
- $\rho(l) = \rho(l')$

Будем говорить, что $l \sim l'$, если $\exists\{l'_k\} \subset H_\gamma^T:\ l \simeq l'_1 \simeq l'_2 \simeq \ldots \simeq l'_k \simeq l'$.
Легко видеть, что $\sim$ является отношением эквивалентности. Через

$$\mathscr{L}[l] = \{l' \in H_\gamma^T | l' \sim l\} \subset H_\gamma^T$$

обозначим класс эквивалентности точки l, который назовем решеткой.
Для подмножеств гидры также можно ввести решетку:

$$\forall B \subset H_\gamma^T : \mathscr{L}[B] = \bigcup_{l\in B} \mathscr{L}[l] \subset H_\gamma^T.$$

При этом операция $\mathscr{L} : B \to \mathscr{L}[B]$ обладает следующими свойствами:

- $\pi^{-1}(\pi(\mathscr{L}[B])) = \rho^{-1}(\rho(\mathscr{L}[B])) = \mathscr{L}[B]$
- $B \subset \mathscr{L}[B]$
- $\mathscr{L}[\mathscr{L}[B]] = \mathscr{L}[B]$
- $\mathscr{L}[B_1 \bigcup B_2] = \mathscr{L}[B_1] \bigcup \mathscr{L}[B_2]$.

Далее введем множество определенности:

$$\forall x \in \overline{\Omega^T[\gamma]} \setminus \Gamma : \Lambda_\gamma^T[x] = \pi(\mathscr{L}[\pi^{-1}(x)]) \subset \Omega.$$

При этом для точек $x,\ x' \in \Omega,\ x \neq x'$ выполнено одно из двух:

- либо $\Lambda_\gamma^T[x] = \Lambda_\gamma^T[x']$,
- либо $\Lambda_\gamma^T[x] \cap \Lambda_\gamma^T[x'] = \emptyset$.

Будем говорить, что точка $(x,t) \in H_\gamma$ - угловая, если выполнено одно из двух условий:

- $x \in \Gamma \cup V$
- $(x,t) \in e_1' \cap e_2' : \; e_i' \in \pi^{-1}(e), \; x \in e$.

Для усеченной гидры H_γ^T точки $(x,t) \in \rho^{-1}(T)$ также отнесем к угловым. Обозначим множество угловых точек через $\mathrm{Corn}\, H_\gamma^T$. Рассмотрим теперь решетку $\mathscr{L}[\mathrm{Corn}\, H_\gamma^T]$. Она разбивает гидру на совокупность непересекающихся открытых интервалов, причем на каждом интервале амплитуда принимает постоянное значение.
Точки на графе, составляющие множество

$$\Theta_\gamma^T = \pi(\mathscr{L}[\mathrm{Corn}\, H_\gamma^T]) \subset \overline{\Omega^T[\gamma]},$$

назовем критическими. Множество $\Pi_\gamma^T = \overline{\Omega^T[\gamma]} \setminus \Theta_\gamma^T$ является объединением открытых интервалов, каждый из которых лежит на каком-то ребре e_j. Пусть ω один из этих интервалов, не содержащий критических точек. Нетрудно видеть, что множество

$$\Phi = \pi(\mathscr{L}(\pi^{-1}(\omega))$$

состоит из конечного числа интервалов $\omega_k \subset \Pi_\gamma^T$ одинаковой длины:

$$\Phi = \bigcup_{k=1}^{M} \omega_k, \;\; \delta_\Phi = \mathrm{diam}(\omega_k) = \tau(x_1, x_2).$$

Интервалы ω_k будем называть клетками, а множество Φ - семейством. Можно показать, что справедливо представление:

$$\Phi = \bigcup_{x \in \omega} \Lambda_\gamma^T[x].$$

При этом Π_γ^T состоит из конечного числа семейств и справедливо представление:

$$\Pi_\gamma^T = \bigcup_{j=1}^{J} \Phi^j = \bigcup_{j=1}^{J} \bigcup_{k=1}^{M_j} \omega_k^j.$$

3.4. Амплитудные векторы

Рассмотрим точку $x \in \Pi_\gamma^T$. Для нее введем следующее множество:

$$\rho(\mathscr{L}(\pi^{-1}(x))) = \{t_i\}_{i=1}^N : \forall i \; 0 < t_i < t_{i+1} < T$$

После этого определим N функций (амплитудных векторов) $a^{T,t_i} : \Lambda_\gamma^T[x] \to \mathbb{R}$ вида:

$$a^{T,t_i}(h) = \begin{cases} a(h,t_i) & \text{при } (h,t_i) \in H_\gamma^T \\ 0, & \text{при } (h,t_i) \notin H_\gamma^T. \end{cases}$$

Рассмотрим пространство $l_2(\Lambda_\gamma^T[x])$ всех вещественнозначных функций на $\Lambda_\gamma^T[x]$ со скалярном произведением:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{h\in\Lambda_\gamma^T[x]} f(h)g(h).$$

Определим подпространство в $l_2(\Lambda_\gamma^T[x])$ - линейную оболочку a^{T,t_i}:

$$\mathscr{A}^T[x] = \operatorname{span}\{a^{T,t_1},\dots,a^{T,t_N}\}.$$

В таких обозначениях можно переписать представление для волны на графе:

$$u^f(x',T)|_{x'\in\Lambda_\gamma^T[x]} = \sum_{i=1}^N \varphi(T-t_i)a^{T,t_i}(x') \text{ для } f=\delta_\gamma\varphi. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь семейство $\Phi = \bigcup\limits_{k=1}^{M} \omega_k$. Введем множество $\mathfrak{T} \subset [0,T]$ следующим образом:

$$\mathfrak{T} = \rho(\pi^{-1}(\Phi)) = \bigcup_{i=1}^{N_\Phi} (\tilde t_i, \tilde t_i').$$

Будем считать, что выполнены соотношения:

- $\tilde t_i < \tilde t_{i+1}$
- $\tilde t_i' < \tilde t_{i+1}$
- $0 \le \tilde t_1 < \tilde t_{N_\Phi} \le T$.

Несложно увидеть, что все интервалы $(\tilde t_i, \tilde t_i')$ имеют одинаковую длину, равную δ_Φ.

Для точек, входящих в клетки семейства Φ, введем удобные параметризации. Их две, в каждой в качестве параметра используется величина r, которая определяется следующим образом.

Параметризация "вверх". Сначала параметризуем точки интервала $(\tilde t_1, \tilde t_1')$:

$$(\tilde t_1, \tilde t_1') \ni t_1(r) = \tilde t_1 + r,\ \ r \in (0,\delta_\Phi).$$

Затем параметризуем точки клеток:

$$\omega_k \ni x_k(r) = \omega_k \bigcap \pi(\mathscr{L}[\rho^{-1}(t_1(r))]).$$

Наконец, параметризуем точки интервалов, составляющих $\mathfrak{T}$:

$$(\tilde t_i, \tilde t_i') \ni t_i(r) = (\tilde t_i, \tilde t_i') \bigcap \rho(\mathscr{L}[\rho^{-1}(t_1(r))]).$$

Параметризация "вниз": Параметризуем точки интервала $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_1')$:

$$(\tilde{t}_1, \tilde{t}_1') \ni t_1(r) = \tilde{t}_1' - r, \ r \in (0, \delta_\Phi).$$

Затем параметризуем точки клеток:

$$\omega_k \ni x_k(r) = \omega_k \bigcap \pi(\mathscr{L}[\rho^{-1}(t_1(r))]).$$

Наконец, параметризуем точки интервалов, составляющих $\mathfrak{T}$:

$$(\tilde{t}_i, \tilde{t}_i') \ni t_i(r) = (\tilde{t}_i, \tilde{t}_i') \bigcap \rho(\mathscr{L}[\rho^{-1}(t_1(r))]).$$

Обе параметризации используются ниже. При обеих параметризациях в каждой клетке ω_k находится по одной точке $x_k(r)$. При изменении параметра r от 0 до δ_Φ каждая из точек заметает свою клетку ω_k. В совокупности точки $x_k(r)$ составляют множество определенности:

$$\{x_k(r)\}_{k=1}^{M_\Phi} = \Lambda_\gamma^T[x_i(r)], \ i = 1, \ldots, M_\Phi.$$

Вместе с выбранной параметризацией точек $x_k(r)$ и моментов времени $t_i(r)$ параметризуются и амплитудные векторы: их компоненты принимают вид $a^{T,t_i(r)}(x_k(r))$. При этом из определения амплитудных векторов нетрудно видеть, что эти компоненты остаются постоянными:

$$a^{T,t_i(r)}(x_k(r)) = a(x_k(r), t_i(r)) = a_k^{T,i}, \quad r \in (0, \delta_\Phi).$$

Вернемся к представлению (3) для волны:

$$u^f(x'(r), T)|_{x'(r) \in \Lambda_\gamma^T[x(r)]} = \sum_{i=1}^{N} \varphi(T - t_i(r)) a^{T,t_i(r)}(x'(r)) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(r) a^{T,t_i(r)}(x'(r)),$$

где $\psi_i(r) = \varphi(T - t_i(r))$. В терминах выбранной выше параметризации оно преобретает вид:

$$u^f(x_k(r), T) = \sum_{i=1}^{N} a_k^{T,i} \psi_i(r), \quad r \in (0, \delta_\Phi). \tag{4}$$

Множества волн

$$\mathscr{U}^s = \{u^f(\cdot, s) | f \in \mathscr{F}^T\} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \{u^f(\cdot, s) | f \in \mathscr{F}_\gamma^T\} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{U}_\gamma^s, \quad s \in [0, T]$$

называются достижимыми. Из представления (4) усматривается характеристическое описание волн: функция $y \in L_2(\Omega^T[\{\gamma\}])$ принадлежит множеству $\mathscr{U}_\gamma^T$ (является волной), если и только если на каждом семействе Φ она допускает представление

$$y(x_k(r)) = \sum_{i=1}^{N} a_k^{T,i} \psi_i(r), \quad \psi_i \in L_2(0, \delta_\Phi), \ x_k(r) \in \omega_k \in \Phi.$$

Из этого представления можно увидеть, что для любой волны $y \in \mathscr{U}_\gamma^T$ ее срезка $\chi_\Phi y$, где $\chi_\Phi(\cdot)$ есть индикатор семейства Φ, также является волной, т.е. лежит в $\mathscr{U}_\gamma^T$.

3.5. Проекторы

Для семейств Φ определим подпространства

$$\mathscr{H}\langle\Phi\rangle = \{\chi_\Phi y \mid y \in \mathscr{H}\}, \quad \mathscr{U}_\gamma^T\langle\Phi\rangle = \{\chi_\Phi y \mid y \in \mathscr{U}_\gamma^T\}.$$

Легко убедиться в справедливости представления:

$$\mathscr{H}\langle\Omega^T[\{\gamma\}]\rangle = \bigoplus\sum_{\Phi\subset\Pi_\gamma^T}\mathscr{H}\langle\Phi\rangle; \quad \mathscr{U}_\gamma^T = \bigoplus\sum_{\Phi\subset\Pi_\gamma^T}\mathscr{U}_\gamma^T\langle\Phi\rangle.$$

Пусть $P_\gamma^T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ есть (ортогональный) проектор на достижимое множество $\mathscr{U}_\gamma^T$. Аналогично пусть $Q_\Phi : \mathscr{H}\langle\Phi\rangle \to \mathscr{H}\langle\Phi\rangle$ есть проектор на $\mathscr{U}_\gamma^T\langle\Phi\rangle$. Тогда выполнено следующее равенство:

$$P_\gamma^T = \bigoplus\sum_{\Phi\subset\Pi_\gamma^T} Q_\Phi.$$

В связи с представлением (4) введем изометрию U:

$$U : \mathscr{H}\langle\Phi\rangle \to L_2((0,\delta_\Phi),\mathbb{R}^{M_\Phi}), \;\; U(y) = \begin{pmatrix} y(x_1(r)) \\ \vdots \\ y(x_{M_\Phi}(r)) \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливо соотношение:

$$U\mathscr{U}_\gamma^T\langle\Phi\rangle = L_2((0,\delta_\Phi),\mathbb{A}_\Phi), \;\; \mathbb{A}_\Phi = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} a_1^{T,1} \\ \vdots \\ a_{M_\Phi}^{T,1} \end{pmatrix}, \therefore, \begin{pmatrix} a_1^{T,N} \\ \dots \\ a_{M_\Phi}^{T,N} \end{pmatrix}\right\}.$$

При этом $\mathbb{R}^{M_\Phi}$ и $\mathbb{A}_\Phi$ можно связать с помощью матрицы проектирования:

$$p_\Phi = \{p_\Phi^{m,m'}\}_{m,m'=1\ldots M_\Phi}.$$

Введем оператор:

$$\widetilde{Q}_\Phi : \;\; \widetilde{Q}_\Phi(L_2((0,\delta_\Phi),\mathbb{R}^{M_\Phi})) = L_2((0,\delta_\Phi),\mathbb{A}_\Phi), \quad Q_\Phi = U^*\widetilde{Q}_\Phi U.$$

Его действие в параметрической форме описывается представлением:

$$\widetilde{Q}_\Phi \begin{pmatrix} y_1(r) \\ \vdots \\ y_{M_\Phi}(r) \end{pmatrix} = p_\Phi \begin{pmatrix} y_1(r) \\ \vdots \\ y_{M_\Phi}(r) \end{pmatrix}, \quad r \in (0,\delta_\Phi).$$

Приведем представление Q_Φ через удобный ортонормированный базис. Проведем ортогонализацию (по Граму-Шмидту) векторов, на которые натянуто $\mathbb{A}_\Phi$. Получим новую систему векторов $\check{\beta} = \{\beta^{T,1},\ldots,\beta^{T,N'}\}$, $N' \le N$ такую, что:

$$\mathbb{A}_\Phi = \mathrm{span}\;\{\beta^{T,1},\ldots,\beta^{T,N'}\}, \;\; \langle\beta^{T,i},\beta^{T,j}\rangle = \delta_{ij}.$$

После этого можно переписать действие проектора:

$$\widetilde{Q}_\Phi \begin{pmatrix} y_1(r) \\ \vdots \\ y_{M_\Phi}(r) \end{pmatrix} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N'} \left\langle y|_{\Lambda_\gamma^T[x(r)]}, \beta^{T,i}\right\rangle \beta^{T,i}, & x(r) \in \Phi \\ 0, & x(r) \in \Omega\setminus\Phi. \end{cases}$$

3.6. Эйконалы

Фиксируем граничную вершину γ и $T>0$. Рассмотрим разбиение отрезка $[0,T]$:

$$\Xi=\{\xi_i\}_{i=0}^K: \quad 0=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_K=T, r(\Xi)=\max_k(\xi_k-\xi_{k-1})$$

Введем следующее обозначение:

$$\Delta P_\gamma^{\xi_k}=P_\gamma^{\xi_k}-P_\gamma^{\xi_{k-1}}$$

Определим самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$

$$E_\gamma^T=\int_0^T \xi\, dP_\gamma^\xi=\lim_{r(\Xi)\to 0}\sum_{k=1}^K \xi_k \Delta P_\gamma^{\xi_k},$$

который будем называть эйконалом. Нетрудно видеть, что он приводится подпространствами $\mathscr{H}\langle\Phi\rangle$ и следовательно справедливо представление:

$$E_\gamma^T=\bigoplus\sum_{\Phi\in\Pi_\gamma^T} E_\gamma^T\chi_\Phi.$$

Опишем действие эйконала в параметрической форме. Пусть

$$y(r)=\begin{pmatrix} y(x_1(r))\\ \vdots \\ y(x_M(r))\end{pmatrix}, \quad B_\Phi=\begin{pmatrix}\beta_1^{T,1} & \ldots & \beta_M^{T,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_1^{T,N} & \ldots & \beta_M^{T,N}\end{pmatrix},$$

$D_\Phi=\{t_i(r)\delta_{ij}\}_{i,j=1}^N$, где $t_i(r)-$ момент времени, введенный в 3.4.

В этих обозначениях действие эйконала выглядит следующим образом:

$$(E_\gamma^T y)(r)=[B_\Phi^* D_\Phi B_\Phi]y(r), \quad r\in(0,\delta_\Phi).$$

Все введенные выше объекты относились к фиксированной вершине γ. Сейчас введем их аналоги, отвечающие произвольному подмножеству $\Sigma\subseteq\Gamma$. Определим гидру

$$H_\Sigma^T=\bigcup_{\gamma\in\Sigma} H_\gamma^T$$

и амплитуду на ней по правилу

$$a_\Sigma(x,t)=\sum_{\gamma\in\Sigma} a_\gamma(x,t), \quad (x,t)\in H_\Sigma,$$

где a_γ - амплитуды, отвечающие отдельным вершинам. Проекции $\pi:(x,t)\mapsto x$ и $\rho:(x,t)\mapsto t$ для $(x,t)\in H_\Sigma$ вводятся так же, как и для отдельных H_γ. Вслед за проекциями все понятия и объекты, определявшиеся для H_γ (отношение соседства на гидре, решетка, множество определенности $\Lambda_\gamma^T[x]$, угловые точки Corn H_γ^T, критические точки Θ_γ^T, множество Π_γ^T, семейства, клетки и их параметризации), приобретают естественные аналоги $\Lambda_\Sigma^T[x]$, Corn H_Σ^T, Θ_Σ^T, Π_Σ^T.

3.7. Алгебра эйконалов

Пусть $\Sigma \subseteq \Gamma$; множество

$$\mathscr{U}_\Sigma^T = \sum_{\gamma\in\Sigma} \mathscr{U}_\gamma^T \subset \mathscr{H}\langle\Omega^T[\Sigma]\rangle$$

(сумма алгебраическая) назовем достижимым с Σ. С вершинами $\gamma\in\Sigma$ связаны эйконалы $E_\gamma^T \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}\langle\Omega^T[\Sigma]\rangle)$. Они определяют подалгебру

$$\mathfrak{E}_\Sigma^T = \bigvee\{E_\gamma^T \mid \gamma\in\Sigma\} \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H}\langle\Omega^T[\Sigma]\rangle),$$

которая называется алгеброй эйконалов.

Для каждого $\gamma\in\Sigma$, соответствующий эйконал представляется в виде

$$E_\gamma^T = \bigoplus\sum_{\Phi\in\Pi_\Sigma^T} E_\gamma^T \chi_\Phi = \bigoplus\sum_{\Phi\in\Pi_\Sigma^T} E_\gamma^T|_{\mathscr{H}\langle\Phi\rangle},$$

отвечающем разбиению на семейства для гидры H_Σ^T.

Рассмотрим разложение алгебры эйконалов на блок-алгебры, введенное в работе [1]. Блок-алгебрами называются подалгебры следующего вида:

$$\mathfrak{b}_\Phi^T = \bigvee\{E_\gamma^T|_{\mathscr{H}\langle\Phi\rangle} \mid \gamma\in\Sigma\} \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H}\langle\Phi\rangle).$$

Справедливо представление:

$$\mathfrak{E}_\Sigma^T = \bigoplus\sum_{\Phi\in\Pi_\Sigma^T} \mathfrak{b}_\Phi^T.$$

В параметрической форме алгебра $\mathfrak{B}(\mathscr{H}\langle\Phi\rangle)$ изометрически изоморфна алгебре $\mathfrak{B}(L_2((0,\delta),\mathbb{R}^{M_\Phi}))$, а каждая блок-алгебра изометрически изоморфна некоторой подалгебре алгебры $C^{\mathrm{op}}([0,\delta_\Phi],\mathbb{M}^{M_\Phi})$.

4. Алгебра эйконалов для конкретного графа

4.1. Простейший граф

Рассматривается граф Ω, состоящий из трех ребер e_1,e_2,e_3, одной внутренней вершины v и трех граничных вершин $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$. Длины ребер l_i удовлетворяют условиям:

$$l_1,l_2 \ll l_3, \quad l_1 < l_2.$$

Наша цель - анализ структуры алгебры эйконалов $\mathfrak{E}_\Sigma^t$ для $\Sigma = \{\gamma_1,\gamma_2\}$ при разных $t = T$.

4.2. Случай T_1

Пусть финальный момент $T = T_1$ в задаче (1) такой, что

$$T_1 < l_1,\ T_1 < l_2$$

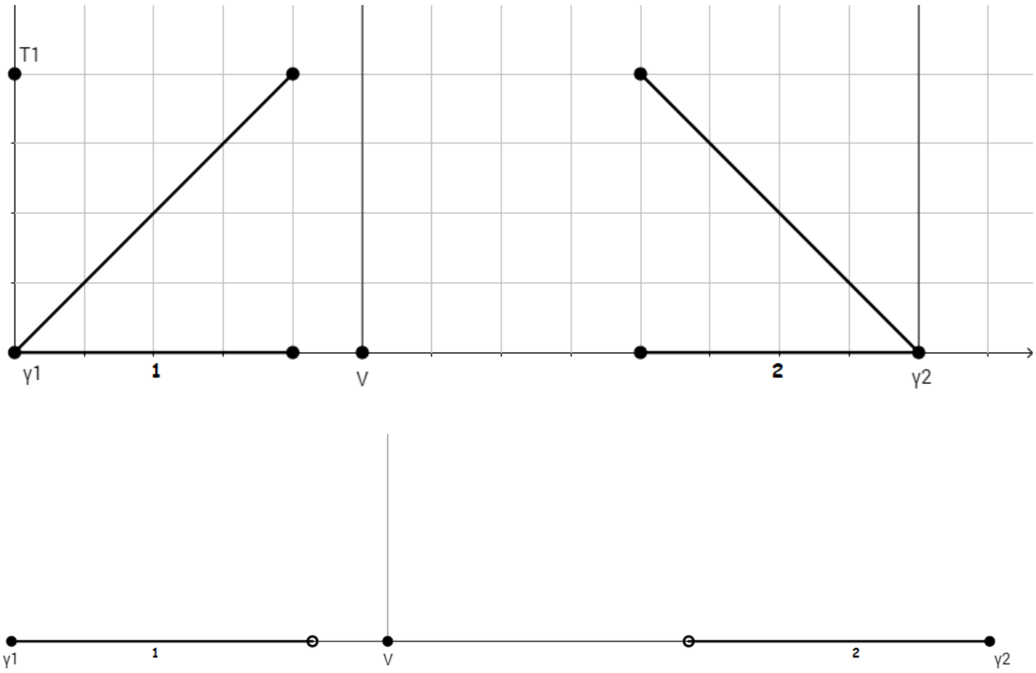

Рис. 1 Гидра и семейства в случае T_1

В этом случае множество Π_{Σ}^{T} состоит из одного семейства Φ, содержащего две клетки. Для него $\delta_{\Phi} = T_1$.
При приведенной на Рис. 1 нумерации клеток и параметризации "вверх", эйконалы E_{γ_1} и E_{γ_2} есть операторы умножения на матрицы-функции:

$$E_1 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in [0,\delta], \quad E_1, E_2 \in C([0,\delta], \mathbb{M}^2). \tag{5}$$

Эйконалы рассматриваются как элементы алгебры $C^{\mathrm{op}}([0,\delta],\mathbb{M}^2) \subset \mathfrak{B}(L_2([0,\delta],\mathbb{R}^2))$. Как следует из определения, алгебра эйконалов есть замыкание алгебры полиномов

$$\mathfrak{P}^{\mathrm{op}} = \{P(E_{\gamma_1}, E_{\gamma_2}) \,|\, P - \text{произвольный полином, не содержащий свободный член}\},$$

которая изометрически изоморфна алгебре матриц-функций

$$\mathfrak{P} = \{P(E_1, E_1) \,|\, P - \text{произвольный полином, не содержащий свободный член}\}.$$

Покажем, что замыкание алгебры $\mathfrak{P}$ есть алгебра

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \phi_i \in C_0([0,\delta]) \right\} \subset C([0,\delta],\mathbb{M}^2).$$

Воспользуемся Теоремой 1. Алгебру $\mathfrak{A}$ рассмотрим как непрерывное поле алгебр $\mathfrak{A}(r)$, таких что:

$$\mathfrak{A}(r) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\} \text{ при } r \neq 0, \quad \mathfrak{A}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Функции E_1 и E_2 допускают представление:

$$E_1 = rP^1, \quad E_2 = rP^2, \text{ где } P^1 = E_{1,1}, P^2 = E_{2,2}.$$

Отметим, что P^1 и P^2 суть матрицы-проекторы в алгебре $\mathbb{M}^2$.
Покажем, что для любых $r_1, r_2 \in [0,\delta], r_1 \neq r_2$ и произвольных $b_1 \in \mathfrak{A}(r_1)$ и $b_2 \in \mathfrak{A}(r_2)$ найдется такой элемент $f \in \mathfrak{P}$, что выполнено $f(r_1) = b_1$ и $f(r_2) = b_2$. Для этого достаточно для выбранных r_1, r_2, b_1, b_2 найти элементы $f^1, f^2 \in \mathfrak{P}$ такие, что $f^1(r_1) = b_1$, $f^1(r_2) = 0$ и $f^2(r_1) = 0$, $f^2(r_2) = b_2$.

Построим функцию f^2. Построение выполним несколько шагов. Пусть $r_2 \neq 0$. Сначала выберем полином $q(x)$ не содержащий свободного члена и удовлетворяющий условиям:

$$q(r_1) = 0, \ q(r_2) = 1$$

(например, $q(r) = \frac{r(r-r_1)}{r_2(r_2-r_1)}$). Рассмотрим $q(E_1) = q(r)P^1$. Тогда в точках r_1 и r_2 имеем:

$$q(E_1)|_{r=r_1} = 0, \ q(E_1)|_{r=r_2} = P^1.$$

Тогда матрица-функция $g^1 = q(E_1) \in \mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

$$g^1(r_1) = 0, \ g^1(r_2) = P^1.$$

Аналогично построим $g^2 \in \mathfrak{P}$ такую, что

$$g^2(r_1) = 0, \ g^2(r_2) = P^2.$$

Тогда для

$$b_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(r_2)$$

матрица-функция $f^2 = a_1 g^1 + a_2 g^2$ удовлетворяет нужным условиям.
Отдельно рассматривается случай $r_2 = 0$. Тогда в качестве f^2 подойдет $f^2 \equiv 0$.

Построение f^1 проходит аналогично.

Найденные f^1, f^2 по построению удовлетворяют условию Теоремы 1. Тем самым, показано, что замыкание алгебры $\mathfrak{P}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ приводится подпространствами

$$U_1 = \{f \in L_2([0,\delta],\mathbb{R}^2) | f_2 = 0 \ \} \text{ и } U_2 = \{f \in L_2([0,\delta],\mathbb{R}^2) | f_1 = 0 \ \}.$$

В каждом из них части алгебры $\mathfrak{A}$ суть $\mathfrak{A}|_{U_i} \cong C_0([0,\delta])$. Отсюда следует представление:

$$\mathfrak{A} \cong C_0([0,\delta]) \oplus C_0([0,\delta]).$$

Итак, алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из соответствующих стандартных алгебр. Как следствие, для алгебры эйконалов получаем представление:

$$\mathfrak{E}^T_\Sigma \cong C_0([0,T_1]) \oplus C_0([0,T_1]).$$

4.3. Случай T_2

Пусть финальный момент $T = T_2$ в задаче (1) такой, что

$$T_2 > l_1,\ T_2 < \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

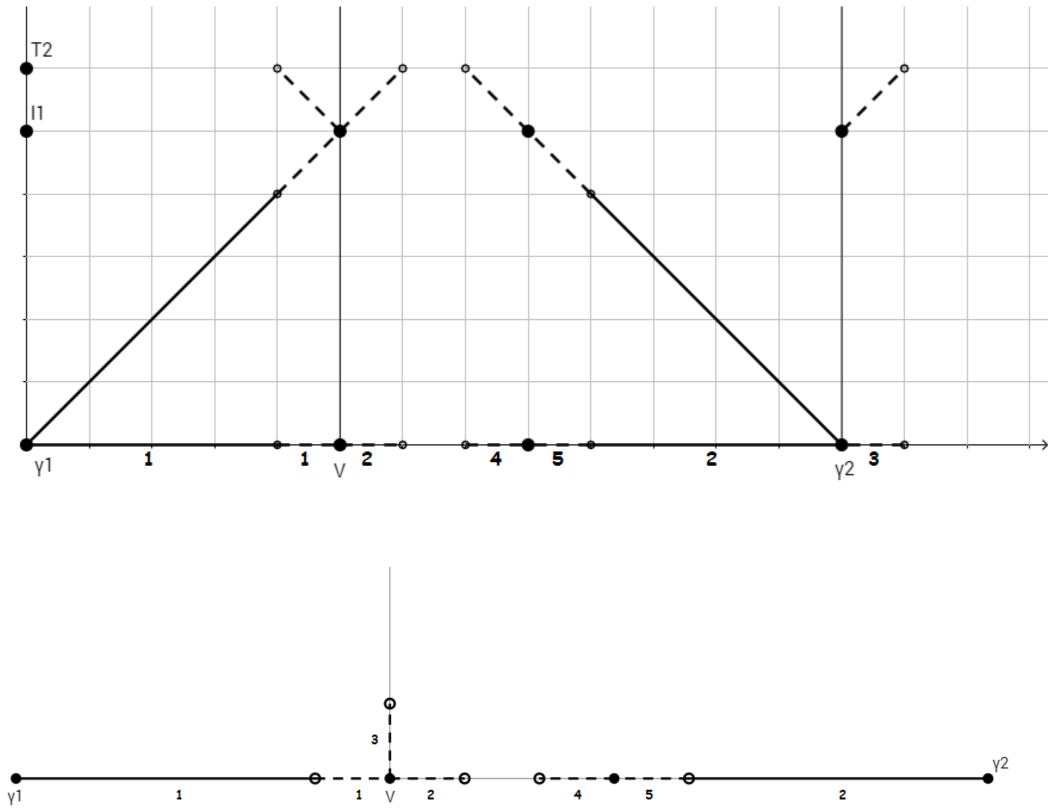

Рис. 2 Гидра и семейства в случае T_2

В этом случае множество Π^T_Σ состоит из двух семейств Φ^1, Φ^2. На Рис.2 семейство Φ^1 указано непрерывным линиям. Ему соответствует значение $\delta = 2l_1 - T_2$. При приведенной на Рис. 2 нумерации клеток и параметризации "вверх", части эйконалов E_{γ_1} и E_{γ_2} в подпространстве $\mathscr{H}\langle\Phi^1\rangle$ есть операторы умножения на матрицы-функции:

$$E_1 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in [0, \delta], \quad E_1, E_2 \in C([0, \delta], \mathbb{M}^2).$$

Фактически, они совпадают с эйконалами в (5). Как следствие, блок-алгебра на семействе Φ^1 имеет вид:

$$\mathfrak{b}^T_{\Phi^1} \cong C_0([0, \delta]) \oplus C_0([0, \delta]).$$

Семейство Φ^2 указано штрихованными линиями. Перейдем к частям эйконалов в подпространстве $\mathscr{H}\langle\Phi^2\rangle$. При приведенной на Рис. 2 нумерации клеток и параметризации "вниз", части эйконалов суть операторы умножения на матрицы-функции:

$$E_1 = \begin{pmatrix} c-r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c+r}{2} & \frac{c+r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c+r}{2} & \frac{c+r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c+r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-r \end{pmatrix}, \quad r \in [0,\delta], \tag{6}$$

где $E_1, E_2 \in C([0,\delta],\mathbb{M}^5)$, $\quad \delta = T_2 - l_1, \quad c = l_1.$

Части эйконалов рассматриваются как элементы алгебры $C^{\mathrm{op}}([0,\delta],\mathbb{M}^5) \subset \mathfrak{B}(L_2([0,\delta],\mathbb{R}^5))$. Как следует из ее определения, блок-алгебра $\mathfrak{b}^T_{\Phi^2}$ есть замыкание алгебры полиномов

$$\mathfrak{P}^{\mathrm{op}} = \{P(E_{\gamma_1}, E_{\gamma_2}) \,|\, P - \text{произвольный полином, не содержащий свободный член}\},$$

которая изометрически изоморфна алгебре матриц-функций

$$\mathfrak{P} = \{P(E_1, E_1) \,|\, P - \text{произвольный полином, не содержащий свободный член}\}.$$

Покажем, что замыкание алгебры $\mathfrak{P}$ есть алгебра

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi_2}{2} & \frac{\phi_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi_2}{2} & \frac{\phi_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \phi_i \in C([0,\delta]), \phi_1(0) = \phi_2(0), \\ \phi_3(0) = \phi_4(0) \end{array} \right\}.$$

Воспользуемся Теоремой 1. Алгебра $\mathfrak{A}$ есть непрерывное поле алгебр $\mathfrak{A}(r)$, таких что:

$$\mathfrak{A}(r) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \middle| a_i \in \mathbb{R} \right\} \text{ при } r \neq 0,$$

$$\mathfrak{A}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{34} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Функции E_1 и E_2 допускают представление:

$$E_1 = (c-r)P^1_1 + (c+r)P^1_2, \quad E_2 = (c-r)P^2_1 + (c+r)P^2_2,$$

где

$$P^1_1 = E_{1,1},\; P^1_2 = \frac{1}{2}(E_{2,2} + E_{2,3} + E_{3,2} + E_{3,3}),\; P^2_1 = E_{5,5},\; P^2_2 = E_{4,4}.$$

Отметим, что P_i^k суть матрицы-проекторы в алгебре $\mathbb{M}^5$.

Покажем, что для любых $r_1, r_2 \in [0,\delta]$, $r_1 \neq r_2$ и произвольных $b_1 \in \mathfrak{A}(r_1)$ и $b_2 \in \mathfrak{A}(r_2)$ найдется такой элемент $f \in \mathfrak{P}$, что выполнено $f(r_1) = b_1$ и $f(r_2) = b_2$. Для этого достаточно для выбранных r_1, r_2, b_1, b_2 найти элементы $f^1, f^2 \in \mathfrak{P}$, такие, что $f^1(r_1) = b_1$, $f^1(r_2) = 0$ и $f^2(r_1) = 0$, $f^2(r_2) = b_2$.

Построим функцию f^2. Построение выполним несколько шагов. Пусть $r_2 \neq 0$. Сначала выберем полином $q(x)$, не содержащий свободного члена и удовлетворяющий условиям:

$$q(c-r_1) = q(c+r_1) = q(c+r_2) = 0, \quad q(c-r_2) = 1.$$

Тогда $q(E_1) = q(c-r)P_1^1 + q(c+r)P_2^1$, а в точках r_1 и r_2 имеем:

$$q(E_1)|_{r=r_1} = 0,\ q(E_1)|_{r=r_2} = P_1^1.$$

При этом матрица-функция $g_1^1 = q(E_1) \in \mathfrak{P}$ удовлетворяет равенствам:

$$g_1^1(r_1) = 0,\ g_1^1(r_2) = P_1^1.$$

Действуя вполне аналогично, выберем $g_i^k \in \mathfrak{P}$ такие, что

$$g_i^k(r_1) = 0,\ g_i^k(r_2) = P_i^k, \quad i,k = 1,2.$$

Тогда для

$$b_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(r_2)$$

матрица-функция $f^2 = a_1 g_1^1 + a_2 g_2^1 + a_3 g_1^2 + a_4 g_2^2$ удовлетворяет нужным требованиям:

$$f^2(r_1) = 0, \quad f^2(r_2) = b_2.$$

Отдельно рассматривается случай $r_2 = 0$. Видно, что не существует полинома $q(r)$, который удовлетворяет условиям

$$q(c-r_1) = q(c+r_1) = q(c) = 0, \quad q(c) = 1.$$

Тогда выберем полином, не содержащий свободного члена, такой что

$$q(c-r_1) = q(c+r_1) = 0, \quad q(c) = 1.$$

Для него выполнено $q(E_1) = q(c-r)P_1^1 + q(c+r)P_2^1$, а в точках r_1 и r_2 имеем:

$$q(E_1)|_{r=r_1} = 0, \quad q(E_1)|_{r=r_2} = P_1^1 + P_2^1.$$

Тогда матрица-функция $g^1_{12} = q(E_1) \in \mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

$$g^1_{12}(r_1) = 0, \quad g^1_{12}(r_2) = P^1_1 + P^1_2.$$

Действуя вполне аналогично, выберем $g^2_{12} \in \mathfrak{P}$ такую, что

$$g^2_{12}(r_1) = 0, \quad g^2_{12}(r_2) = P^2_1 + P^2_2.$$

Тогда для

$$b_2 = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{34} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(r_2)$$

матрица-функция $f^2 = a_{12}g^1_{12} + a_{34}g^2_{12}$ удовлетворяет нужным нужным требованиям:

$$f^2(r_1) = 0, \quad f^2(r_2) = b_2.$$

Построение f^1, такой, что

$$f^1(r_1) = b_1, \quad f^1(r_2) = 0$$

проводится аналогично.

Найденные f^1, f^2 по построению удовлетворяют условию Теоремы 1. Тем самым, показано, что замыкание алгебры $\mathfrak{P}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}$.

Теперь представим алгебру $\mathfrak{A}$ в виде суммы стандартных алгебр. Пусть $U \in C([0,\delta], \mathbb{M}^5)$ - постоянная матрица-функция:

$$U(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда выполнено

$$\mathfrak{A} \cong U^*\mathfrak{A}U = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \phi_i \in C([0,\delta]), \\ \phi_1(0) = \phi_2(0), \\ \phi_3(0) = \phi_4(0) \end{array} \right\} \cong$$

$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \phi_i \in C([0,\delta]), \\ \phi_1(0) = \phi_2(0), \\ \phi_3(0) = \phi_4(0) \end{array} \right\}.$$

Входящим в это представление функциям ϕ_i сопоставим функции на интервале $[0,2\delta]$:

$$\psi_1(r) = \begin{cases} \phi_1(\delta - r), \ r \in [0,\delta] \\ \phi_2(r-\delta), \ r \in (\delta, 2\delta] \end{cases}, \quad \psi_2(r) = \begin{cases} \phi_3(\delta - r), \ r \in [0,\delta] \\ \phi_4(r-\delta), \ r \in (\delta, 2\delta] \end{cases}.$$

В силу условий на ϕ_i они оказываются непрерывными, т.е. лежат в $C([0,2\delta])$. Тогда, как легко видеть, для алгебры $\mathfrak{A}$ справедливо представление

$$\mathfrak{A} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix} \middle| \psi_i \in C([0,2\delta]) \right\}.$$

Отсюда видно, что для алгебры $\mathfrak{A}$ выполнено

$$\mathfrak{A} \cong C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta]).$$

Как итог, получаем представление блок-алгебры $\mathfrak{b}^T_{\Phi^2}$ в виде стандартных алгебр:

$$\mathfrak{b}^T_{\Phi} \cong C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta]).$$

Окончательно, для алгебры эйконалов $\mathfrak{E}^T_\Sigma$ приходим к представлению:

$$\mathfrak{E}^T_\Sigma \cong C_0([0,2l_1 - T_2]]) \oplus C_0([0,2l_1 - T_2]]) \oplus C([0,2(T_2 - l_1)]) \oplus C([0,2(T_2 - l_1)]).$$

Отметим, что суммарная длина всех интервалов, на которых определены алгебры из правой части, равна $2T_2$.

4.4. Случай T_3

Пусть финальный момент $T = T_3$ в задаче (1) таков, что

$$T_3 > \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad T_3 < l_2. \tag{7}$$

В этом случае множество Π^T_Σ состоит из семейств Φ^1, Φ^2, Φ^3. На Рис.3 семейство Φ^1 указано непрерывными линиями. Ему соответствует значение $\delta = 2l_1 - T_3$. При приведенной на Рис. 3 нумерации клеток и параметризации "вверх", части эйконалов E_{γ_1} и E_{γ_2} в подпространстве $\mathscr{H}\langle\Phi^1\rangle$ есть операторы умножения на матрицы-функции:

$$E_1 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in [0,\delta], \quad E_1, E_2 \in C([0,\delta], \mathbb{M}^2).$$

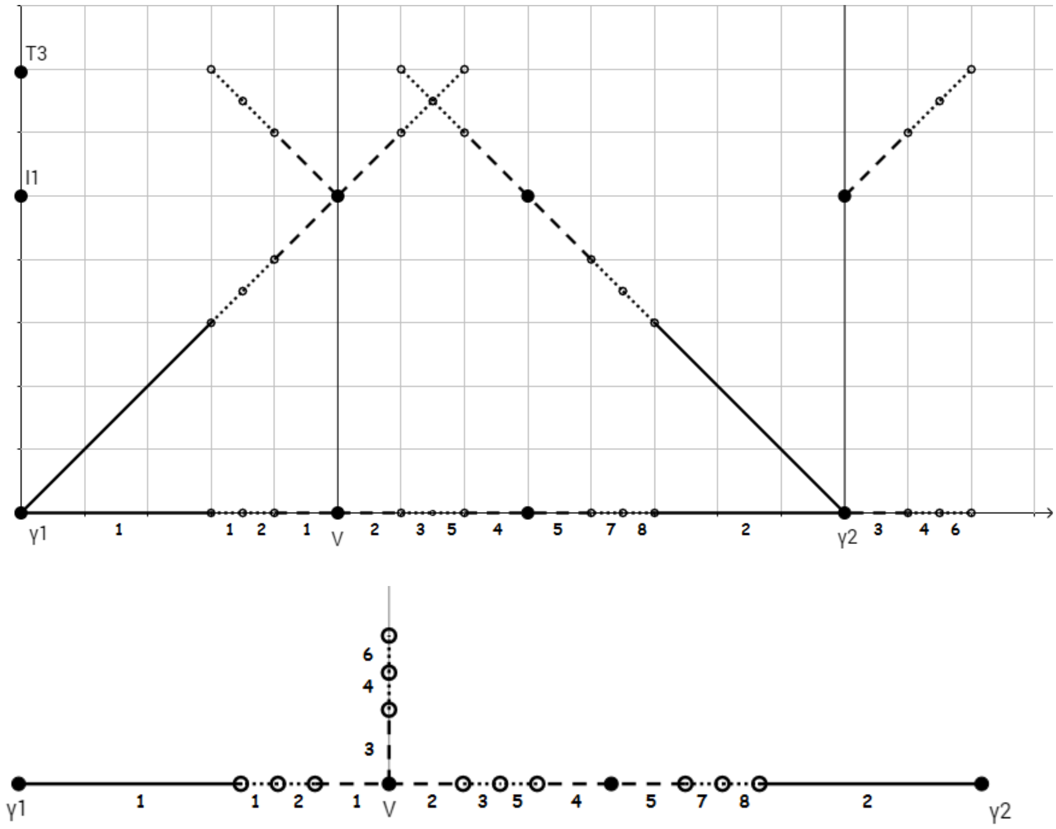

Рис. 3 Гидра и семейства в случае T_3

Фактически, они совпадают с эйконалами в (5). Как следствие, блок-алгебра на семействе Φ^1 имеет вид:

$$\mathfrak{b}^T_{\Phi^1} \cong C_0([0,\delta]) \oplus C_0([0,\delta]).$$

Семейство Φ^2 указано штрихованными линиями. Перейдем к частям эйконалов в подпространстве $\mathscr{H}\langle\Phi^2\rangle$. При приведенной на Рис. 3 нумерации клеток и параметризации "вниз", части эйконалов суть операторы умножения на матрицы-функции:

$$E_1 = \begin{pmatrix} c-r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c+r}{2} & \frac{c+r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c+r}{2} & \frac{c+r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c+r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-r \end{pmatrix}, \quad r \in [0,\delta],$$

где $E_1, E_2 \in C([0,\delta], \mathbb{M}^5)$, $\quad \delta = l_2 - T_3, \quad c = l_1.$

Фактически, они совпадают с эйконалами в (6). Как следствие, блок-алгебра на семействе Φ^2 имеет вид:

$$\mathfrak{b}^T_{\Phi^2} \cong C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta]).$$

Семейство Φ^3 указано точечными линиями. Перейдем к частям эйконалов в подпространстве $\mathscr{H}\langle\Phi^3\rangle$. При приведенной на Рис. 3 нумерации клеток и параметризации "вниз", части эйконалов суть операторы умножения на матрицы-функции:

$$E_1 = \begin{pmatrix} c_1 - r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_2-r}{2} & \frac{c_2-r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_2-r}{2} & \frac{c_2-r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2+r}{2} & \frac{c_2+r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2+r}{2} & \frac{c_2+r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r \in [0,\delta],$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 + r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 - r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 + r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 - r \end{pmatrix}, \qquad r \in [0,\delta], \tag{8}$$

где

$$E_1, E_2 \in C([0,\delta],\mathbb{M}^8), \quad \delta = T_3 - \frac{l_1+l_2}{2}, \quad c_1 = \frac{3l_1 - l_2}{2},\ c_2 = \frac{l_1+l_2}{2}.$$

В силу (7) выполнены неравенства

$$\delta > 0, \quad c_1 + \delta < c_2 - \delta. \tag{9}$$

Части эйконалов рассматриваются как элементы алгебры $C^{\mathrm{op}}([0,\delta],\mathbb{M}^8) \subset \mathfrak{B}(L_2([0,\delta],\mathbb{R}^8))$. Как следует из определения, алгебра эйконалов есть замыкание алгебры полиномов

$$\mathfrak{P}^{\mathrm{op}} = \{P(E_{\gamma_1}, E_{\gamma_2}) \mid P - \text{произвольный полином, не содержащий свободный член}\},$$

которая изометрически изоморфна алгебре матриц-функций

$$\mathfrak{P} = \{P(E_1, E_1) \mid P - \text{произвольный полином, не содержащий свободный член}\}.$$

Покажем, что замыкание алгебры $\mathfrak{P}$ есть алгебра

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3^{11}(r) & \phi_3^{12}(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3^{21}(r) & \phi_3^{22}(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_4^{11}(r) & \phi_4^{12}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_4^{21}(r) & \phi_4^{22}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_5(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_6(r) \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \phi_i, \phi_i^{jk} \in C([0,\delta]), \\ \phi_1(0) = \phi_2(0), \\ \phi_5(0) = \phi_6(0), \\ \phi_3^{ij}(0) = \phi_4^{ij}(0) \end{matrix} \right\}.$$

Воспользуемся Теоремой 1. Алгебру $\mathfrak{A}$ рассмотрим как непрерывное поле алгебр $\mathfrak{A}(r)$, таких что:

$$\mathfrak{A}(r) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{11} & a_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{21} & a_3^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^{11} & a_4^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^{21} & a_4^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \right| a_i, a_i^{jk} \in \mathbb{R} \right\} \text{ при } r \neq 0,$$

$$\mathfrak{A}(0) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{34}^{11} & a_{34}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{34}^{21} & a_{34}^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{34}^{11} & a_{34}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{34}^{21} & a_{34}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56} \end{pmatrix} \right| a_{ij}, a_{ij}^{kl} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Функции E_1 и E_2 допускают представление:

$$E_1 = (c_1 - r)P_1^1 + (c_1 + r)P_2^1 + (c_2 - r)P_3^1 + (c_2 + r)P_4^1$$

$$E_2 = (c_1 - r)P_1^2 + (c_1 + r)P_2^2 + (c_2 + r)P_3^2 + (c_2 - r)P_4^2$$

где

$$P_1^1 = E_{1,1},\ P_2^1 = E_{2,2},\ P_3^1 = \frac{1}{2}(E_{3,3} + E_{3,4} + E_{4,3} + E_{4,4}),\ P_4^1 = \frac{1}{2}(E_{5,5} + E_{5,6} + E_{6,5} + E_{6,6}),$$

$$P_1^2 = E_{8,8},\ P_2^2 = E_{7,7},\ P_3^2 = E_{3,3},\ P_4^2 = E_{5,5}.$$

Отметим, что P_i^k суть матрицы-проекторы в алгебре $\mathbb{M}^8$.

Покажем, что для любых $r_1, r_2 \in [0, \delta], r_1 \neq r_2$ и произвольных $b_1 \in \mathfrak{A}(r_1)$ и $b_2 \in \mathfrak{A}(r_2)$ найдется такой элемент $f \in \mathfrak{P}$, что выполнено $f(r_1) = b_1$ и $f(r_2) = b_2$. Для этого достаточно для выбранных r_1, r_2, b_1, b_2 найти элементы $f^1, f^2 \in \mathfrak{P}$ такие, что $f^1(r_1) = b_1, f^1(r_2) = 0$ и $f^2(r_1) = 0, f^2(r_2) = b_2$.

Построим функцию f^2. Построение выполним несколько шагов. Пусть $r_2 \neq 0$. Сначала выберем полином $q(x)$, не содержащий свободного члена и удовлетворяющий условиям:

$$q(c_1 - r_1) = q(c_1 + r_1) = q(c_2 - r_1) = q(c_2 + r_1) = 0,$$

$$q(c_1+r_2)=q(c_2-r_2)=q(c_2+r_2)=0, \quad q(c_1-r_2)=1.$$

В силу неравенств (9) и $r_1 \neq r_2$ условия непротиворечивы. Тогда $q(E_1)=q(c_1-r)P_1^1+q(c_1+r)P_2^1+q(c_2-r)P_3^1+q(c_2+r)P_4^1$, а в точках r_1 и r_2 имеем:

$$q(E_1)|_{r=r_1}=0,\ q(E_1)|_{r=r_2}=P_1^1.$$

При этом матрица-функция $g_1^1=q(E_1)\in\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

$$g_1^1(r_1)=0,\ g_1^1(r_2)=P_1^1.$$

Действуя вполне аналогично, построим $g_i^k\in\mathfrak{P}$ такие, что

$$g_i^k(r_1)=0,\ g_i^k(r_2)=P_i^k,\ i,k=1,2.$$

Воспользуемся Следствием 1.2. Видно, что пары матриц P_3^1,P_3^2 и P_4^1,P_4^2 удовлетворяют условиям из Следствия 1.2. Тогда для

$$b_2=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3^{11} & a_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3^{21} & a_3^{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^{11} & a_4^{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^{21} & a_4^{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}\in\mathfrak{A}(r_2)$$

существуют матрицы-функции $h_1,h_2\in\mathfrak{P}$, аннулирующиеся в точке $r=r_1$ и принимающие следующие значения в точке $r=r_2$:

$$h_1(r_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3^{11} & a_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3^{21} & a_3^{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad h_2(r_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^{11} & a_4^{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^{21} & a_4^{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица-функция $f^2=a_1g_1^1+a_2g_2^1+a_5g_2^2+a_6g_1^2+h_1+h_2$, удовлетворяет нужным требованиям:

$$f^2(r_1)=0, \quad f^2(r_2)=b_2.$$

Отдельно рассматривается случай $r_2=0$. Видно, что не существует полинома $q(r)$, который одновременно удовлетворяет условиям

$$q(c_1)=0, \quad q(c_1)=1.$$

Тогда выберем полином, не содержащий свободного члена, удовлетворяющий условиям

$$q(c_1-r_1)=q(c_1+r_1)=q(c_2-r_1)=q(c_2+r_1)=q(c_2)=0, \quad q(c_1)=1.$$

Рассмотрим $q(E_1)$. В точках r_1 и r_2 имеем равенства:

$$q(E_1)|_{r=r_1}=0,\ q(E_1)|_{r=r_2}=P_1^1+P_2^1.$$

Тогда матрица-функция $g_{12}^1=q(E_1)\in\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

$$g_{12}^1(r_1)=0,\ g_{12}^1(r_2)=P_1^1+P_2^1.$$

Аналогично построим матрицы-функции $g_{12}^i, g_{34}^i\in\mathfrak{P}$ такие, что

$$g_{12}^i:\ g_{12}^i(r_1)=0,\ g_{12}^i(r_2)=P_1^i+P_2^i$$

$$g_{34}^i:\ g_{34}^i(r_1)=0,\ g_{34}^i(r_2)=P_3^i+P_4^i$$

Тогда для

$$b_2=\begin{pmatrix} a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{34}^{11} & a_{34}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{34}^{21} & a_{34}^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{34}^{11} & a_{34}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{34}^{21} & a_{34}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56} \end{pmatrix}\in\mathfrak{A}(r_2),$$

пользуясь Следствием 1.2, аналогично случаю $r_2\neq 0$ получается существование матрицы-функции f^2, удовлетворяющей нужным условиям.
Построение функции f^1, такой, что

$$f^1(r_1)=b_1, \quad f^1(r_2)=0$$

проводится аналогично.

Найденные f^1, f^2 по построению удовлетворяют условию Теоремы 1. Тем самым, показано, что замыкание алгебры $\mathfrak{P}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}$.

Аналогично тому, как это было сделано в случае T_2, введем новые функции $\psi_i, \sigma^{ij}\in C([0,2\delta])$ следующим образом:

$$\psi_1(r)=\begin{cases} \phi_1(\delta-r),\ r\in[0,\delta] \\ \phi_2(r-\delta),\ r\in(\delta,2\delta] \end{cases}, \quad \psi_2(r)=\begin{cases} \phi_5(\delta-r),\ r\in[0,\delta] \\ \phi_6(r-\delta),\ r\in(\delta,2\delta] \end{cases},$$

$$\sigma^{ij}(r)=\begin{cases} \phi_3^{ij}(\delta-r),\ r\in[0,\delta] \\ \phi_4^{ij}(r-\delta),\ r\in(\delta,2\delta] \end{cases}.$$

Тогда, как легко видеть, для алгебры $\mathfrak{A}$ справедливо представление:

$$\mathfrak{A} \cong \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \psi_1(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{11}(r) & \sigma^{12}(r) & 0 \\ 0 & \sigma^{21}(r) & \sigma^{22}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_2(r) \end{array} \right) \middle| \ \psi_i, \sigma^{ij} \in C([0,2\delta]) \right\} \cong$$

$$\cong C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta], \mathbb{M}^2) \oplus C([0,2\delta]).$$

Как итог, получаем представление для блок-алгебры $\mathfrak{b}^T_{\Phi^3}$ в виде стандартных алгебр:

$$\mathfrak{b}^T_{\Phi^3} \cong C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta], \mathbb{M}^2) \oplus C([0,2\delta]).$$

Окончательно, для алгебры эйконалов $\mathfrak{E}^T_\Sigma$ приходим к представлению:

$$\mathfrak{E}^T_\Sigma \cong C_0([0,2l_1-T_3]) \oplus C_0([0,2l_1-T_3]) \oplus C([0,2(l_2-T_3)]) \oplus C([0,2(l_2-T_3)]) \oplus$$
$$\oplus C([0,2T_3-l_1-l_2]) \oplus C([0,2T_3-l_1-l_2], \mathbb{M}^2) \oplus C([0,2T_3-l_1-l_2]).$$

Отметим, что сумма длин всех промежутков, на которых определены алгебры из правой части, с учетом размерности каждой алгебры (т.е. 1 для всех алгебр $C([0,\delta])$ и 2 для $C([0,\delta],\mathbb{M}^2)$), опять составляет $2T_3$:

$$(2l_1-T_3)+(2l_1-T_3)+2(l_2-T_3)+2(l_2-T_3)+(2T_3-l_1-l_2)+2[(2T_3-l_1-l_2)]+(2T_3-l_1-l_2)=2T_3.$$

4.5. Случай T_4

Пусть финальный момент $T = T_4$ в задаче (1) такой, что

В этом случае множество Π^T_Σ состоит из семейств Φ^1, Φ^2, Φ^3. На Рис.4 семейство Φ^1 указано непрерывными линиями. Ему соответствует значение $\delta = 2l_1 - T_4$. При приведенной на Рис. 4 нумерации клеток и параметризации "вверх", части эйконалов E_{γ_1} и E_{γ_2} в подпространстве $\mathscr{H}\langle\Phi^1\rangle$ есть операторы умножения на матрицы-функции:

$$E_1 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in [0,\delta], \quad E_1, E_2 \in C([0,\delta], \mathbb{M}^2).$$

$$T_4 > l_2, \quad T_4 < 2l_1. \tag{10}$$

Фактически, они совпадают с эйконалами в (5). Как следствие, блок-алгебра на семействе Φ^1 имеет вид:

$$\mathfrak{b}^T_{\Phi^1} \cong C_0([0,\delta]) \oplus C_0([0,\delta]).$$

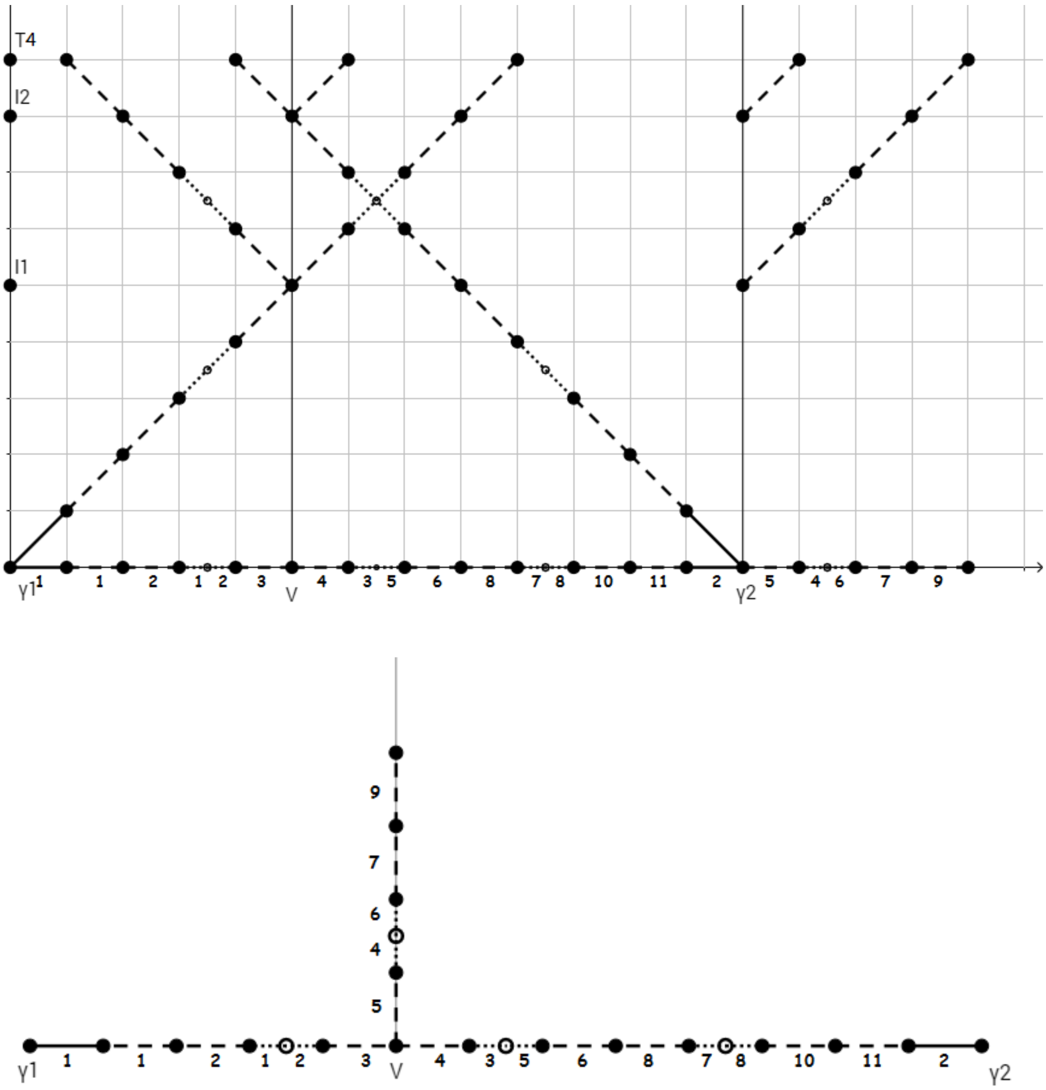

Рис. 4 Гидра и семейства в случае T_4

Семейство Φ^2 указано точечными линиями. Перейдем к частям эйконалов в подпространстве $\mathscr{H}\langle\Phi^2\rangle$. При приведенной на Рис. 4 нумерации клеток и параметризации "вниз", части эйконалов суть операторы умножения на матрицы-функции:

$$E_1 = \begin{pmatrix} c_1 - r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_2-r}{2} & \frac{c_2-r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_2-r}{2} & \frac{c_2-r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2+r}{2} & \frac{c_2+r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2+r}{2} & \frac{c_2+r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r \in [0, \delta],$$

$$
E_2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c_2+r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_2-r & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1+r & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1-r
\end{pmatrix}, \qquad r \in [0,\delta],
$$

где

$$
E_1, E_2 \in C([0,\delta],\mathbb{M}^8), \quad \delta = \frac{3l_2 - l_1}{2} - T_4, \quad c_1 = \frac{3l_1 - l_2}{2},\ c_2 = \frac{l_1 + l_2}{2}.
$$

Их структура вполне аналогична (8). Как следствие, блок-алгебра на семействе Φ^2 имеет вид:

$$
\mathfrak{b}^T_{\Phi^2} \cong C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta],\mathbb{M}^2) \oplus C([0,2\delta]).
$$

Семейство Φ^3 указано штрихованными линиями. Перейдем к частям эйконалов в подпространстве $\mathscr{H}\langle\Phi^3\rangle$. При приведенной на Рис. 4 нумерации клеток и параметризации "вниз", части эйконалов суть операторы умножения на матрицы-функции:

$$
E_1 = \begin{pmatrix}
c_1-r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_1+r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c_2-r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{c_2+r}{2} & \frac{c_2+r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{c_2+r}{2} & \frac{c_2+r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_3-r}{2} & \frac{c_3-r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_3-r}{2} & \frac{c_3-r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_3+r}{2} & \frac{c_3+r}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_3+r}{2} & \frac{c_3+r}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \quad r \in [0,\delta],
$$

$$
E_2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{c_3+r}{2} & 0 & \frac{c_3+r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_3-r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{c_3+r}{2} & 0 & \frac{c_3+r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2+r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2-r & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1+r & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1-r
\end{pmatrix}, \quad r \in [0,\delta],
$$

где

$$E_1, E_2 \in C([0,\delta], \mathbb{M}^{11}), \quad \delta = T_4 - l_2, \quad c_1 = 2l_1 - l_2, \quad c_2 = l_1, \quad c_3 = l_2.$$

В силу (10) выполнены неравенства

$$\delta > 0, \quad c_1 + \delta < c_2 - \delta, \quad c_2 + \delta < c_3 - \delta. \tag{11}$$

Части эйконалов рассматриваются как элементы алгебры $C^{\text{op}}([0,\delta], \mathbb{M}^{11}) \subset \mathfrak{B}(L_2([0,\delta], \mathbb{R}^{11}))$. Как следует из определения, алгебра эйконалов есть замыкание алгебры полиномов

$$\mathfrak{P}^{\text{op}} = \{P(E_{\gamma_1}, E_{\gamma_2}) \mid P - \text{произвольный полином, не содержащий свободный член}\},$$

которая изометрически изоморфна алгебре матриц-функций

$$\mathfrak{P} = \{P(E_1, E_1) \mid P - \text{произвольный полином, не содержащий свободный член}\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ следующую алгебру:

$$\mathfrak{M} = \left\{ X \begin{pmatrix} \xi^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \xi^{22} & \xi^{23} \\ 0 & \xi^{32} & \xi^{33} \end{pmatrix} X^{-1} \,\middle|\, \xi^{i,j} \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что замыкание алгебры $\mathfrak{P}$ есть алгебра

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3^{11} & \phi_3^{12} & \phi_3^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3^{21} & \phi_3^{22} & \phi_3^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3^{31} & \phi_3^{32} & \phi_3^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_4^{11} & \phi_4^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_4^{21} & \phi_4^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_5^{11} & \phi_5^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_5^{21} & \phi_5^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_7 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{c} \phi_i, \phi_i^{jk} \in C([0,\delta]), \\ \phi_1(0) = \phi_2(0), \\ \phi_6(0) = \phi_7(0), \\ \phi_4^{ij}(0) = \phi_5^{ij}(0) \\ \{\phi_3^{ij}(0)\} \in \mathfrak{M} \end{array} \right\}.$$

Воспользуемся Теоремой 1. Алгебру $\mathfrak{A}$ рассмотрим как непрерывное поле алгебр $\mathfrak{A}(r)$, таких что:

$$\mathfrak{A}(r)=\left\{\left(\begin{array}{ccccccccccc}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{11} & a_3^{12} & a_3^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{21} & a_3^{22} & a_3^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{31} & a_3^{32} & a_3^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^{11} & a_4^{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^{21} & a_4^{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5^{11} & a_5^{12} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5^{21} & a_5^{22} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7
\end{array}\right)\;\middle|\; a_i, a_i^{jk}\in\mathbb{R}\right\}\qquad \text{при } r\neq 0,$$

$$\mathfrak{A}(0)=\left\{\left(\begin{array}{ccccccccccc}
a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{11} & a_3^{12} & a_3^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{21} & a_3^{22} & a_3^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{31} & a_3^{32} & a_3^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^{11} & a_{45}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^{21} & a_{45}^{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^{11} & a_{45}^{12} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^{21} & a_{45}^{22} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67}
\end{array}\right)\;\middle|\; \begin{array}{c} a_i, a_{45}^{ij}\in\mathbb{R},\\ a_3^{ij}\in\mathbb{R},\\ \{a_3^{ij}\}\in\mathfrak{M}\end{array}\right\}.$$

Функции E_1 и E_2 допускают представление:

$$\begin{aligned}
E_1 &= (c_1-r)P_1^1+(c_1+r)P_2^1+(c_2-r)P_3^1+(c_2+r)P_4^1+(c_3-r)P_5^1+(c_3+r)P_6^1,\\
E_2 &= (c_1-r)P_1^2+(c_1+r)P_2^2+(c_2-r)P_3^2+(c_2+r)P_4^2+(c_3-r)P_5^2+(c_3+r)P_6^2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&P_1^1=E_{1,1},\ P_2^1=E_{2,2},\ P_3^1=E_{3,3}, P_4^1=\tfrac{1}{2}(E_{4,4}+E_{4,5}+E_{5,4}+E_{5,5}),\\
&P_5^1=\tfrac{1}{2}(E_{6,6}+E_{6,7}+E_{7,6}+E_{7,7}),\ P_6^1=\tfrac{1}{2}(E_{8,8}+E_{8,9}+E_{9,8}+E_{9,9})\\
&P_1^2=E_{11,11},\ P_2^2=E_{10,10},\ P_3^2=E_{8,8},\ P_4^2=E_{6,6}\\
&P_5^2=E_{4,4},\ P_6^2=\tfrac{1}{2}(E_{3,3}+E_{3,5}+E_{5,3}+E_{5,5}).
\end{aligned}$$

Отметим, что P_i^k суть матрицы-проекторы в алгебре $\mathbb{M}^{11}$.

Покажем, что для любых $r_1, r_2\in[0,\delta], r_1\neq r_2$ и произвольных $b_1\in\mathfrak{A}(r_1)$ и $b_2\in\mathfrak{A}(r_2)$ найдется такой элемент $f\in\mathfrak{P}$, что выполнено $f(r_1)=b_1$ и $f(r_2)=b_2$. Для этого достаточно для выбранных r_1, r_2, b_1, b_2 найти элементы $f^1, f^2\in\mathfrak{P}$ такие, что $f^1(r_1)=b_1$, $f^1(r_2)=0$

и $f^2(r_1)=0, f^2(r_2)=b_2$.

Построим функцию f^2. Построение выполним несколько шагов. Пусть $r_2\neq 0$. Сначала выберем полином $q(x)$, не содержащий свободного члена и удовлетворяющий условиям:

$$\begin{aligned}&q(c_1-r_1)=q(c_1+r_1)=q(c_2-r_1)=q(c_2+r_1)=0,\\&q(c_3-r_1)=q(c_3+r_1)=q(c_1+r_2)=q(c_2-r_2)=0,\\&q(c_2+r_2)=q(c_3-r_2)=q(c_3+r_2)=0,\\&q(c_1-r_2)=1.\end{aligned}$$

В силу неравенств (11) и $r_1\neq r_2$ условия непротиворечивы. Тогда

$$q(E_1)=q(c_1-r)P_1^1+q(c_1+r)P_2^1+q(c_2-r)P_3^1+q(c_2+r)P_4^1+q(c_3-r)P_5^1+q(c_3+r)P_6^1,$$

а в точках r_1 и r_2 имеем:

$$q(E_1)|_{r=r_1}=0,\ q(E_1)|_{r=r_2}=P_1^1.$$

При этом матрица-функция $g_1^1=q(E_1)\in\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

$$g_1^1(r_1)=0,\ g_1^1(r_2)=P_1^1.$$

Действуя вполне аналогично, построим $g_i^k\in\mathfrak{P}$ такие, что

$$g_i^k(r_1)=0,\ g_i^k(r_2)=P_i^k,\quad i=1,\ldots,6,\quad k=1,2.$$

Воспользуемся Следствиями 1.2 и 2.1. Видно, что пары матриц P_5^1,P_4^2 и P_6^1,P_3^2 удовлетворяют условиям из Следствия 1.2, а пара $d_1P_3^1+d_2P_4^1, z_1P_5^2+z_2P_6^2$, где $d_1\neq d_2\neq 0, z_1\neq z_2\neq 0$ удовлетворяет условию Следствия 2.1. Тогда для

$$b_2=\begin{pmatrix}a_1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&a_2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&a_3^{11}&a_3^{12}&a_3^{13}&0&0&0&0&0&0\\0&0&a_3^{21}&a_3^{22}&a_3^{23}&0&0&0&0&0&0\\0&0&a_3^{31}&a_3^{32}&a_3^{33}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&a_4^{11}&a_4^{12}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&a_4^{21}&a_4^{22}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&a_5^{11}&a_5^{12}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&a_5^{21}&a_5^{22}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&a_6&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&a_7\end{pmatrix}\in\mathfrak{A}(r_2)$$

существуют матрицы-функции $h_1,h_2,h_3\in\mathfrak{P}$, аннулирующиеся в точке $r=r_1$ и принимающие следующие значения в точке $r = r_2$:

$$h_1(r_2) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&a_3^{11}&a_3^{12}&a_3^{13}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&a_3^{21}&a_3^{22}&a_3^{23}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&a_3^{31}&a_3^{33}&a_3^{33}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$h_2(r_2) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&a_4^{11}&a_4^{12}&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&a_4^{21}&a_4^{22}&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

$$h_3(r_2) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&a_5^{11}&a_5^{12}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&a_5^{21}&a_5^{22}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Матрица-функция $f^2 = a_1 g_1^1 + a_2 g_2^1 + a_6 g_2^2 + a_7 g_1^2 + h_1 + h_2 + h_3$, удовлетворяет нужным требованиям:

$$f^2(r_1) = 0, \quad f^2(r_2) = b_2.$$

Отдельно рассматривается случай $r_2 = 0$. Видно, что не существует полинома $q(r)$, который одновременно удовлетворяет условиям

$$q(c_1) = 0, \quad q(c_1) = 1.$$

Тогда выберем полином, не содержащий свободного члена, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned}
&q(c_1 - r_1) = q(c_1 + r_1) = q(c_2 - r_1) = q(c_2 + r_1) = 0,\\
&q(c_3 - r_1) = q(c_3 + r_1) = q(c_2) = q(c_3) = 0,\\
&q(c_1) = 1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим $q(E_1)$. В точках r_1 и r_2 имеем равенства:

$$q(E_1)|_{r=r_1} = 0,\ q(E_1)|_{r=r_2} = P_1^1 + P_2^1.$$

Тогда матрица-функция $g_{12}^1 = q(E_1) \in \mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

$$g_{12}^1(r_1) = 0,\ g_{12}^1(r_2) = P_1^1 + P_2^1.$$

Аналогично построим матрицы-функции $g_{12}^i, g_{34}^i \in \mathfrak{P}$ такие, что

$$g_{12}^i:\ g_{12}^i(r_1) = 0,\ g_{12}^i(r_2) = P_1^i + P_2^i$$

$$g_{34}^i:\ g_{34}^i(r_1) = 0,\ g_{34}^i(r_2) = P_3^i + P_4^i$$

$$g_{56}^i:\ g_{56}^i(r_1) = 0,\ g_{56}^i(r_2) = P_5^i + P_6^i$$

Тогда для

$$b_2 = \begin{pmatrix}
a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{11} & a_3^{12} & a_3^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{21} & a_3^{22} & a_3^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_3^{31} & a_3^{32} & a_3^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^{11} & a_{45}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^{21} & a_{45}^{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^{11} & a_{45}^{12} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^{21} & a_{45}^{22} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67}
\end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(0),$$

пользуясь Следствиями 1.2 и 3.1, аналогично случаю $r_2 \neq 0$ получается существование матрицы-функции f^2, удовлетворяющей нужным условиям. Отметим, что в этом случае используется Следствие 3.1 вместо Следствия 2.1, что связано со структурой матриц $P_3^1 + P_4^1, P_5^2 + P_6^2$.

Построение функции f^1, такой, что

$$f^1(r_1) = b_1, \quad f^1(r_2) = 0$$

проводится аналогично.

Найденные f^1, f^2 по построению удовлетворяют условию Теоремы 1. Тем самым, показано, что замыкание алгебры $\mathfrak{P}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}$.

Аналогично тому, как это было сделано в случаях T_2 и T_3, введем новые функции $\psi_i, \sigma^{ij} \in C([0,2\delta]), \chi^{ij} \in C([0,\delta])$ следующим образом:

$$\psi_1(r) = \begin{cases} \phi_1(\delta - r), \ r \in [0,\delta] \\ \phi_2(r-\delta), \ r \in (\delta, 2\delta] \end{cases}, \quad \psi_2(r) = \begin{cases} \phi_6(\delta - r), \ r \in [0,\delta] \\ \phi_7(r-\delta), \ r \in (\delta, 2\delta] \end{cases},$$

$$\sigma^{ij}(r) = \begin{cases} \phi_4^{ij}(\delta - r), \ r \in [0,\delta] \\ \phi_5^{ij}(r-\delta), \ r \in (\delta, 2\delta] \end{cases}, \quad \chi^{ij}(r) = \phi_3^{ij}(r), r \in [0,\delta].$$

Тогда, как легко видеть, для алгебры $\mathfrak{A}$ справедливо представление:

$$\mathfrak{A} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{21} & \sigma^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi^{11} & \chi^{12} & \chi^{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi^{21} & \chi^{22} & \chi^{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi^{31} & \chi^{32} & \chi^{33} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \psi_i, \sigma^{ij} \in C([0,2\delta]), \\ \chi^{ij} \in C([0,\delta]), \\ \{\chi^{ij}(0)\} \in \mathfrak{M} \end{array} \right\} \cong$$

$$\cong C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta], \mathbb{M}^2) \oplus \mathfrak{K},$$

где

$$\mathfrak{K} \cong \left\{ f \in C([0,\delta], \mathbb{M}^3) \, \middle| \, \{f^{ij}(0)\} \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{K} \cong \dot{C}([0,\delta])$. Как итог, получаем представление для блок-алгебры $\mathfrak{b}^T_{\Phi^3}$ в виде стандартных алгебр:

$$\mathfrak{b}^T_{\Phi^3} \cong C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta]) \oplus C([0,2\delta], \mathbb{M}^2) \oplus \dot{C}([0,\delta]).$$

Окончательно, для алгебры эйконалов $\mathfrak{E}^T_\Sigma$ приходим к представлению:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^T_\Sigma \cong\, & C_0([0,2l_1 - T_4]) \oplus C_0([0,2l_1 - T_4]) \oplus C([0,3l_2 - l_1 - 2T_4]) \oplus \\ & \oplus C([0,3l_2 - l_1 - 2T_4]) \oplus C([0,3l_2 - l_1 - 2T_4], \mathrm{M}^2(\mathbb{R})) \oplus C([0,2(T_4 - l_2)]) \oplus \\ & \oplus C([0,2(T_4 - l_2)]) \oplus C([0,2(T_4 - l_2)], \mathrm{M}^2(\mathbb{R})) \oplus \dot{C}([0,T_4 - l_2]) \end{aligned}$$

Литература

[1] Belishev M.I., Wada N., *A C^*-algebra associated with dynamics on a graph of strings*, Vol. 67, No. 3 (2015) pp. 1239–1274 doi: 10.2969/jmsj/06731239

[2] Диксмье Ж., *C^*-алгебры и их представления*, Москва, 1974.

[3] Мёрфи Дж., *C^*-алгебры и теория операторов*, Москва, 1997.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*, Москва, 1976.